Lecture 16

Plan: 1. 费马定理

2. Rolle 微分中值定理

3 Lagrange 微分中值定理

Def 若 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内恒有

$f(x)\le f(x_0)$ $(f(x)\ge f(x_0))$

则称 x_0 为 $f(x)$ 的极大(小)值点，

$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大(小)值.

若不等号严格成立 $\Rightarrow$ 严格极大(小)值



定理 5.1.1. (Fermat) 设 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 上定义，x_0 是 $f(x)$ 的极值点，且 $f(x_0)$ 存在

则 $f'(x_0)=0$。

证明: 不妨设 $f(x_0)$ 为极大值

当 $\Delta x>0$ 对 $\Delta x\in U(x_0,\delta)$ 时

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\le 0$$

令 $\Delta x\to 0+0$ 知 $f'(x_0)\le 0$

又当 $\Delta x<0$，$x_0+\Delta x\in U(x_0,\delta)$ 时

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ge 0$$

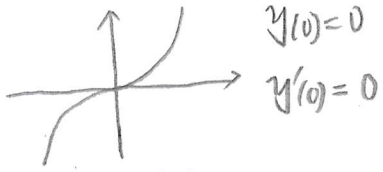
令 $\Delta x\to 0-0$ 知 $f'(x_0)\ge 0$

于是 $f'(x_0)=0$

注: (1) x_0 使 $f'(x)=0$，则 x_0 为驻点，

(2) 驻点未必是极值点，

$y=x^3$ $y'=3x^2$



(3) 极值点未必可导

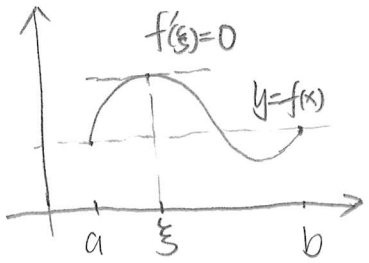
Rolle 微分中值定理

定理 5.1.2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)$

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ

s.t. $f'(\xi)=0$。

证明:



由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值，记为 M

和最小值，记为 m.

若 $M=m$，显然

若 $M>m$，至少有一个不等于

$f(a)=f(b)$.

不妨设 $M\ne f(a)=f(b)$

则 $\exists\xi\in(a,b)$. s.t. $f(\xi)=M$

则 ξ 为 $f(x)$ 的极大值点，

且 $f'(\xi)$ 存在

由 Fermat 定理知 $f'(\xi)=0$.

注：(1) 定理未给出 ξ 的求法

(2) 定理中 ξ 可能不唯一

例 5.1.1 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可微

证明 $f(x)$ 在 (a,b) 上两个零点之间

必有 $f(x)+f'(x)$ 的零点.

分析：试图构造 $F(x)$，

s.t. $F(x)=0 \Rightarrow f(x)+f'(x)=0$

观察 $(e^x f(x))' = e^x f(x) + e^x f'(x)$

$= e^x (f(x)+f'(x))$

证明：令 $F(x)=e^x f(x)$

则 $f(x)$ 的零点也是 $F(x)$ 的零点，

由 Rolle 微分中值定理

$f(x)$ 的两个零点之间必有 ξ

s.t. $F'(\xi)=e^{\xi}(f(\xi)+f'(\xi))=0$

即有 $f(\xi)+f'(\xi)=0$ 。

例 5.1.2，设 $P_n(x)$ 为一个 n 次多项式

证明 $e^x - P_n(x)=0$ 至多有 $n+1$ 个根

分析：若 $e^x-P_n(x)$ 有 $n+2$ 个零点，

由 Rolle 知 $(e^x-P_n(x))^{(n+1)}$ 有 1 个零点，

但 $(e^x-P_n(x))^{(n+1)}=e^x$ 无零点、、

证略。

例 5.1.3 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续

在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0$

设 $\exists t_0 \in (0,1)$ s.t. $f(t_0)=\alpha$

证明：$\exists \xi \in (0,1)$ s.t. $f'(\xi)=\alpha$

分析：构造 $F(x)$

s.t. ① $F(x)$ 有两个等值点

② $F'(x)=0 \Rightarrow f(x)=\alpha$

证明：若 $\alpha=0$，显然

若 $\alpha \neq 0$. 令 $F(x)=f(x)-\alpha x$

$F(0)=0$, $F(1)=-\alpha<0$,

$F(t_0)=\alpha-\alpha t_0=\alpha(1-t_0)>0$.

则 $\exists \eta \in (t_0,1)$ s.t. $F(\eta)=0$

在 $[0,\eta]$ 上对 $F(x)$ 使用 Rolle 知

$\exists \xi \in (0,\eta) \subset (0,1)$ s.t.

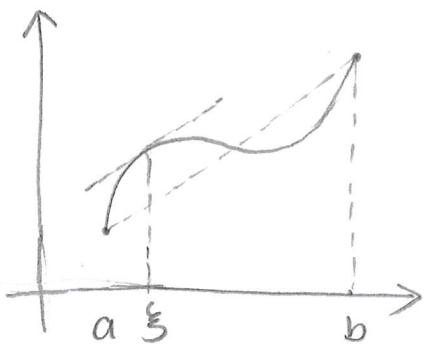
$f'(\xi)=\alpha$.

※ Lagrange 微分中值定理

定理 5.1.3 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

在 (a,b) 上可导，则 $\exists \xi \in (a,b)$

s.t. $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



分析：构造 $F(x)$

s.t. (1) $F(a)=F(b)$

(2) $F'(x)\Rightarrow$ 命题

$\Rightarrow F(x)=f(x)-$"a,b切线"

$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$$

证略

注：(1) 设 $f(x)\in C[a,b]$，且在 (a,b) 上可导，若 $f'(x)=0$，则 $f(x)=C$，C 为常数

$\forall x\in(a,b]$ 在 $[a,x]$ 上使用 Lagrange

s.t. $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi)=0$

$\Rightarrow f(x)=f(a)$

(2) 设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 上可导

若 $f'(x)=g'(x)$，则 $f(x)=g(x)+C$

例 5.1.4 证明 $x>-1$ 且 $x\neq 0$ 时

有 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

证明：对 $\ln(1+x)$，在 $0,x$ 之间使用 Lagrange 微分中值定理

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x-0}=\frac{1}{1+\xi}$$

其中 ξ 在 0 x 之间

当 $x>0$ 时 有

$$\frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+\xi}<1,$$

则 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

而当 $-1<x<0$ 时

$$1<\frac{1}{1+\xi}<\frac{1}{1+x}$$

则 $x>\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$.

例 5.1.5. 证明 $f(x)=x^\alpha$ $(0<\alpha<1)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续

分析：易知 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上一致连续

只需证 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续

当 $x\geq 1$ 时，$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\leq\alpha<1$

则由 Lagrange

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)(x_1-x_2)|$$
$$<|x_1-x_2|$$

证略.