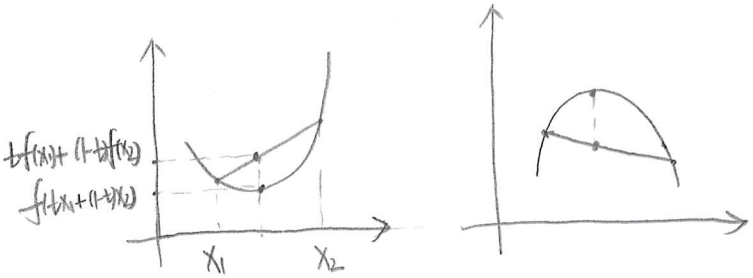
Lecture 22.

Plan: 1. 函数凹凸性

2. 更多不等式

※ 凹凸性.

"曲线在割线线段一侧"



Def: 设$f(x)$在区间I内定义

若$\forall x_1, x_2 \in I$, $\forall t \in (0,1)$, 有

$$f(tx_1+(1-t)x_2) \leq tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$$

则称$f(x)$为I上的凸函数

若$x_1 \neq x_2$, $\forall t \in (0,1)$ 有

$$f(tx_1+(1-t)x_2) < tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$$

则称$f(x)$为I上严格凸函数

注: (1) 类似可定义"凹"

(2) 记忆: $f(x)=ax^2+bx+c$

凸: $a \geq 0$ ∪

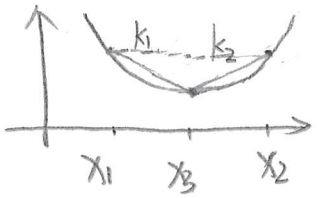
凹: $a \leq 0$ ∩

凸又凹: $a=0$ ／ or ＼

(3) $f(x)$为凸

$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_3 < x_2$

(※) $\dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \dfrac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}$



$k_1 \leq k_2$

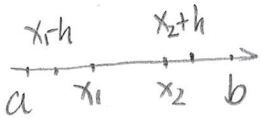
证明: 取$t=\dfrac{x_2-x_3}{x_2-x_1}$, 略

定理 5.4.4 设$f(x) \in C[a,b]$且在(a,b)上可导, 则

(1) $f(x)$为凸 $\Leftrightarrow f'(x)$单调上升

(2) $f(x)$严格凸 $\Leftrightarrow f'(x)$严格单调上升

证明: $\Rightarrow$



$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$

欲证 $f'(x_1) \leq f'(x_2)$

取$h>0$, s.t. x_1-h, $x_2+h \in (a,b)$

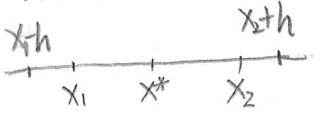
则由(※)知

$$\frac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}$$

令 $h \to 0+0$ 得

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'(x_2)$$

若严格凸



$$\frac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h} < \frac{f(x^*)-f(x_1)}{x^*-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x^*)}{x_2-x^*} < \frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}$$

令 $h \to 0+0$ 得

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x^*)-f(x_1)}{x^*-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x^*)}{x_2-x^*} < f'(x_2)$$

$\Leftarrow$ 若 $f(x)$ 为凸，欲证

$\forall x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$, $x_1 < x_2 < x_3$

有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

由 Lagrange 微分中值定理

$\exists\, \xi_1 \in (x_1, x_2)$ $\xi_2 \in (x_2, x_3)$, s.t.

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi_1)$$

$$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = f'(\xi_2)$$

由 $f'(x)$ 单调上升，则 $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$

于是 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

严格情况，类似可证。 ∎

定理 5.4.5 设 $f(x) \in C[a,b]$ 且在 (a,b) 上二阶可导，则

(1) $f(x)$ 为凸 $\Leftrightarrow$ $f''(x) \ge 0$

(2) $f(x)$ 严格凸 $\Leftrightarrow$ $f''(x) \ge 0$ 且 $f''(x)$ 在 (a,b) 的任一子区间不恒为 0.

例 5.4.8 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的凸函数

证明：$\forall x_1, \cdots, x_n \in [a,b]$, $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, $(t_i > 0)$

有 $f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n)$

$$\le t_1 f(x_1) + \cdots + t_n f(x_n).$$

证明：数学归纳法。

当 $n=2$ 时，由定义.

假证 $n=k$ 时成立，考虑 $n=k+1$ 时.

$\forall x_1, \cdots, x_{k+1} \in [a,b]$, $t_i > 0$, $i = 1, \cdots, k+1$

且 $\sum_{i=1}^{k+1} t_i = 1$

令：$\lambda_i = \frac{t_i}{1-t_{k+1}}$, $i = 1, \cdots, k$

则 $\lambda_i > 0$ 且 $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

则 $f(t_1x_1 + \cdots + t_kx_k + t_{k+1}x_{k+1})$

$$= f\big((1-t_{k+1})(\lambda_1x_1 + \cdots + \lambda_kx_k) + t_{k+1}x_{k+1}\big)$$

$$\le (1-t_{k+1}) f(\lambda_1x_1 + \cdots + \lambda_kx_k) + t_{k+1} f(x_{k+1})$$

$$\le (1-t_{k+1})\big(\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_k f(x_k)\big) + t_{k+1} f(x_{k+1})$$

$$= t_1 f(x_1) + \cdots + t_k f(x_k) + t_{k+1} f(x_{k+1}).$$

注 ① 严格时，类似可证.

② 推荐记忆

例 5.4.9 $a_i > 0$, $i = 1, \cdots, n$, 不全相等

证明当 $x \ne 0$ 时

$$\times \frac{a_1^x \ln a_1 + \cdots + a_n^x \ln a_n}{a_1^x + \cdots + a_n^x} - \ln \frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} > 0$$

分析：(1) 等价于证明

$$\frac{1}{n} a_1^x \ln a_1^x + \cdots + \frac{1}{n} a_n^x \ln a_n^x > \frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \ln \frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n}$$

(2) 可证 $f(u) = u \ln u$ 严格凸.

例 5.4.10 设 $a_i > 0$, $(i = 1, \cdots, n)$ 不全相同

证明：$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}, & x \ne 0 \\ \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}, & x = 0 \end{cases}$

在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格上升.

分析：由例5.2.8知 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x^2}\left(x\frac{a_1^x\ln a_1+\cdots+a_n^x\ln a_n}{n}-\ln\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)$$

且 $f(x)>0$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$

则 $f'(x)>0$ 若 $x\neq 0$

于是 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格上升，

注：$f(-1)=\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$ 调和平均

$f(0)=\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$ 几何平均

$f(1)=\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ 算术平均

$f(+\infty)=\max\{a_1,\cdots,a_n\}$

$f(-\infty)=\min\{a_1,\cdots,a_n\}$

$$\min\{a_1,\cdots,a_n\}<\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}<\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$$

$$<\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)<\max\{a_1,\cdots,a_n\}$$

若 $a_1,\cdots,a_n$ 不全相等，

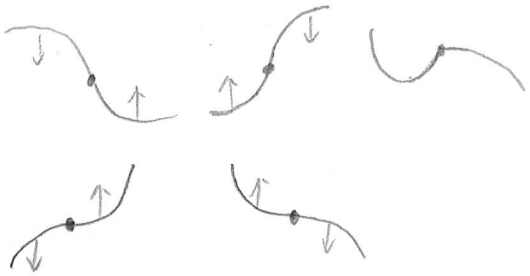
称为 调和-几何-算术不等式.

例 5.4.11 (阅读)

※ 拐点，$f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 上连续

在 $U_0^-(x_0,\delta)$ 与 $U_0^+(x_0,\delta)$ 凸性改变，则

x_0 为 $f(x)$ 的拐点



注：(1) 拐点，$f'(x_0)$ 存在 $\Rightarrow f'(x_0)=0$

(2) $f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0\Rightarrow x_0$ 是拐点，

※ 渐近线

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$x=x_0$ 垂直渐近线

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$，$y=b$ 水平渐近线

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(kx+b))=0$ 且 $k\neq 0$

$y=kx+b$ 斜渐近线

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)$$

注 $x\to-\infty$，$x\to\infty$ 类似

