Lecture 26

Plan: 1. 三角函数有理式

2. 无理函数

$$R(u,v)=\frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$$

P, Q: 二元多项式

R: 二元有理函数

$R(\sin x,\cos x)$ 三角函数有理式

$$I=\int R(\sin x,\cos x)\,dx$$

万能公式: $t=\tan\frac{x}{2}$, $x=2\arctan x$

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx=2\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$I=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

例 $I=\int\frac{dx}{5+4\sin x}$

$$=\int\frac{1}{5+\frac{8t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{2}{5t^2+8t+5}dt$$

$$=\cdots=\frac{2}{3}\arctan\frac{5\tan\frac{x}{2}+4}{3}+C$$

对称性技巧

考虑: $R(u,v)$ $u=\sin x$, $v=\cos x$

① $R(u,-v)=-R(u,v)$, $t=\sin x$

② $R(-u,v)=-R(u,v)$, $t=\cos x$

③ $R(-u,-v)=R(u,v)$, $t=\tan x$

例 $I=\int\frac{\cos^3x}{1+\sin^2x}dx$

$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$

$t=\sin x$ $dt=\cos x\,dx$

$$I=\int\frac{\cos^2x}{1+\sin^2x}d\sin x=\int\frac{1-\sin^2x}{1+\sin^2x}d\sin x$$

$$=\int\frac{1-t^2}{1+t^2}dt=\cdots$$

$$=2\arctan\sin x-\sin x+C$$

例 $I=\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^2x+\cos x}dx$

$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$

$t=\cos x$ $dt=-\sin x\,dx$

$$I=\int\frac{-\cos x\,d\cos x}{1-\cos^2x+\cos x}=\int\frac{-t}{1-t^2+t}dt=\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|1+\cos x-\cos^2x\right|+\frac{1}{\sqrt5}\ln\left|\frac{\sqrt5+1-2\cos x}{\sqrt5-1+2\cos x}\right|+C$$

例 $I=\int \frac{\cos^2 x}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2}dx$

$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$

$t=\tan x,\quad dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx$

$$I=\int \frac{\cos^4 x}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2}\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int \frac{1}{(a^2\tan^2 x+b^2)^2}d\tan x$$

$$=\int \frac{1}{(a^2t^2+b^2)^2}dt=\cdots$$

$$=\frac{\tan x}{2b^2}\cdot\frac{1}{b^2+a^2\tan^2 x}+\frac{1}{2ab^3}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)+C$$

※无理函数

类型Ⅰ $I=\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$

$m\in\mathbb{N},\ ad-bc\neq 0$

$$t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

例 $I=\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$

$t=\sqrt[6]{x+1}\quad t^6=x+1$

$dx=6t^5dt$

$$I=\int \frac{1-t^3}{1+t^2}6t^5dt$$

$$=6\int \frac{t^5-t^8}{1+t^2}dt$$

$=\cdots$

但是，我建议

$u=x+1$

$s=\sqrt{u}$

$\Rightarrow$

类型Ⅱ $I=\int x^m(a+bx^n)^p dx$

$m,n,p\in\mathbb{Q}$

$x^n=t\quad dt=n\cdot x^{n-1}dx$

$$dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1-n}{n}}dt$$

$$I=\int t^{\frac{m}{n}}(a+bt)^p\frac{1}{n}t^{\frac{1-n}{n}}dt$$

$$=\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p dt$$

令 $q=\frac{m+1}{n}-1$

① $p\in\mathbb{Z}$，$q=\frac{r}{s}\quad z=\sqrt[s]{t}$

② $q\in\mathbb{Z}$，$p=\frac{r}{s}\quad z=\sqrt[s]{a+bt}$

③ $p+q\in\mathbb{Z}$，$p=\frac{r}{s}\quad z=\sqrt[s]{\frac{a+bt}{t}}$

例 $I=\int \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}dx\quad (x>0)$

$$=\int x^{-1}\sqrt{x^4+1}\,dx$$

$$=\int \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}\frac{1}{2}dx^2$$

$$\overset{t=x^2}{=}\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{t^2+1}{t\sqrt{t^2+1}}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt+\frac{1}{2}\int \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt$$

$\triangleq I_1+I_2$

$$I_1=\frac{1}{4}\int (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}d(t^2+1)$$

$$=\frac{1}{2}(t^2+1)+C$$

$$I_2=\frac{1}{4}\int \frac{dt^2}{t^2\sqrt{1+t^2}}\quad (u=t^2)$$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{du}{u\sqrt{1+u}}\quad (\text{类型Ⅰ})$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^4}}{x^2}\right|+C\cdots$$