Week 2 Lecture 3

Plan: 1. 反函数
2. 函数的性质
3. 初等函数

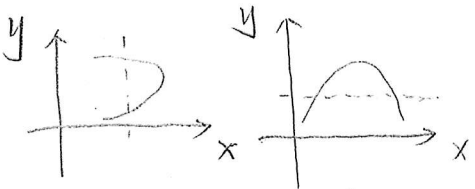
回顾 构造新函数的方法

① 四则运算

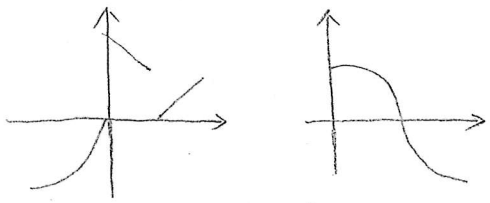
② 限制和延拓

③ 复合

④ 反函数



不是函数　　函数



"一一对应"函数

Def. 设 $f: X \to Y$ 是一个函数

① 若 $\forall x_1, x_2 \in X$，只要 $x_1 \neq x_2$ 就有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 $f(x)$ 是单的.

② 若 $Y = f(X)$，则称 $f(x)$ 是满的

③ 若 $f(x)$ 既单又满，则称它是一个一一对应

④ 设 $f: X \to Y$ 是一个一一对应

定义函数 $g: Y \to X$ 如下，

对于 $\forall y \in Y$，$g(y)$ 的函数值为由 $y = f(x)$ 所唯一确定的 $x \in X$.

$g(y)$ 称为 $f(x)$ 的反函数，记为 $g = f^{-1}$.

性质: ① $f(f^{-1}(y)) = y$，$\forall y \in Y$

$f^{-1}(f(x)) = x$，$\forall x \in X$.

② 习惯上，也记 $y = f(x)$ 的反函数为 $y = f^{-1}(x)$.

$y = f(x)$，$y = f^{-1}(x)$ 图像关于 $y = x$ 对称

例 1.2.7. 求 $y = f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 的反函数

($e = 2.7182\cdots$ 为一常数)

由 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 知

$2e^x y = (e^x)^2 - 1$

$e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$

舍去 $e^x = y - \sqrt{y^2+1}$ ($e^x > 0$)

则 $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$

于是所求反函数为

$y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$，$x \in (-\infty, +\infty)$.

例 1.2.8 设 $y = f(x)$ 为定义在 X 上的函数 $Y = f(X)$. 证明：若存在 Y 上的函数 $g(y)$ s.t. $g(f(x)) = x$，则 $f(x)$ 反函数存在，且 $g = f^{-1}$.

证明：易知复合函数为单，则内、外函数单

$g(f(x)) = x$ 为单，则 $f(x)$ 为单

由 $f(X) = Y$，则 $f(x)$ 为满

则 $f(x)$ 是一一对应

$\forall y \in Y$，有 $x \in X$，$f(x) = y$

$g(y) = g(f(x)) = x$，于是 $g = f^{-1}$.

(考虑 $f: [0,1] \to [0,1]$，$x \mapsto \sqrt{x}$；$g: [0,1] \to [0,1]$，$x \mapsto x^2$)

考虑分式线性函数

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\quad (ad-bc\neq 0)$$

易知它有反函数，反函数仍是分式线性函数.

两个分式线性函数的复合仍为分式线性函数.（阅读教材）

※ 函数的性质

A. 有界性

Def. 设 $y=f(x)$ 是定义在 X 上的函数

① 若 $\exists M$, s.t. $\forall x\in X$, 有 $f(x)\leq M$

则称 $f(x)$ 在 X 上有上界（M 是一个上界）

② 若 $\exists m$, s.t. $\forall x\in X$ 有 $f(x)\geq m$

则称 $f(x)$ 在 X 上有下界，（m 是一个下界）

③ $f(x)$ 在 X 上有上界，有下界，则在 X 上有界

若 $\forall x\in X$, $|f(x)|\leq M$, 则 M 是一个界.

换句话说 $f(x)$ 是有界集.

④ 肯定的语气定义无界

$f(x)$ 在 X 上无界：$\forall M>0$, $\exists x_0\in X$, s.t. $|f(x_0)|>M$.

例 1.3.2 证：$f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$ 在 $(0,1]$ 上无上界无下界

但在 $[a,1]$ 上有界，$0<a<1$.

证明 $\forall M>0$ 取 $n_0\in\mathbb{N}$, $n_0>M$, 并取

$x_0=\frac{1}{2n_0\pi+\frac{\pi}{2}}$，可见 $x_0\in(0,1]$

且 $f(x_0)=\frac{1}{x_0}=2n_0\pi+\frac{\pi}{2}>n_0>M$

所以 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上无上界。

无下界，类似可证。

对 $a>0$，取 $M=\frac{1}{a}$，则 $\forall x\in[a,1]$,

有 $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leq\left|\frac{1}{x}\right|\leq M$

所以 $f(x)$ 在 $[a,1]$ 上有界。

※ 单调性

设 $y=f(x)$ 是定义在 X 上的函数，

① $\forall x_1,x_2\in X$，只要 $x_1<x_2$

便有 $f(x_1)\leq f(x_2)$（$f(x_1)\geq f(x_2)$）

则称 $f(x)$ 在 X 上单调上升（下降）.

② 若将 "$\leq$" 换成 "$<$"（"$\geq$" 换成 "$>$"）

则称 $f(x)$ 在 X 上严格单调上升（下降）

注意：严格单调 $\longrightarrow$ 存在反函数

存在反函数未必单调.

例 1.3.4

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ 1-x, & x\in(0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

易知 $f=f^{-1}$，但 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 的任何子区间都不单调.

※ 周期性

设 $y=f(x)$ 是 X 上的函数

① 若 $\exists T>0$, $\forall x\in X$, 有 $f(x)=f(x+T)$

则称 $f(x)$ 为周期函数（T 为一个周期）

② 若存在最小的周期 T_0，则称 T_0 为 $f(x)$ 的基本周期.

例 1.3.5 $y=\tan x$ 定义域为 $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+n\pi : n\in\mathbb{Z}\}$，$\pi$ 为基本周期

例1.3.6. Dirichlet 函数 $D(x)$

易知任何正有理数都是 $D(x)$ 的周期.

$D(x)$ 没有基本周期

例 1.3.7. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的周期函数, 有基本周期 $T>0$. 证明: 若 $\forall x\in(0,2)$ 有 $f(x)\neq f(0)$, 则 $g(x)=f(x^2)$ 不是周期函数

证明: 用反证法. 假定 $g(x)$ 是周期函数

令 $T>0$ 是 $g(x)$ 的一个周期, 则

$$g(x)=g(x+T),\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

(*) $f((x+T)^2)=f(x^2)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

令 $x=0$, 得 $f(T^2)=f(0)$.

而 $f(x)$ 以 T 为基本周期

$\exists k\in\mathbb{N}$, s.t. $T^2=k\cdot 2$, 即 $T=\sqrt{k\cdot 2}$.

令 $x=\sqrt{(k+1)\cdot 2}$, 代入 (*)

得, $f\left(\left(\sqrt{(k+1)\cdot 2}+\sqrt{k\cdot 2}\right)^2\right)=f((k+1)\cdot 2)$.

R.H.S. $=f(0)$

L.H.S. $=f\left((k+1)\cdot 2+2\sqrt{k(k+1)}\cdot 2+k\cdot 2\right)$

$=f\left(2\sqrt{k(k+1)}\cdot 2\right)$

所以 $\exists n\in\mathbb{N}$, s.t. $n=2\sqrt{k(k+1)}$

于是 $\left(\frac{n}{2}\right)^2=k(k+1)$

可知 $\frac{n}{2}\in\mathbb{N}$, 且 $k<\frac{n}{2}<k+1$

这不可能.

所以, $g(x)$ 不可能是周期函数.

4 奇偶性

设 $y=f(x)$ 是 X 上的函数.

且 X 关于原点对称, 即 $x\in X\Rightarrow -x\in X$.

① 若 $\forall x\in X$, $f(x)=-f(-x)$

则称 $f(x)$ 是 X 上的奇函数

② 若 $\forall x\in X$, $f(x)=f(-x)$

则称 $f(x)$ 是 X 上的偶函数

易知偶函数图像关于 y 轴对称

奇函数图像关于原点对称

例 1.3.8 设 $y=f(x)$ 是 X 上奇函数且存在反函数. 证明: 它的反函数也是奇函数

证明: 由奇函数定义 $\forall x\in X$

$$f(-x)=-f(x)$$

则 $f^{-1}(-f(x))=f^{-1}(f(-x))$

$$=-x$$

$$=-f^{-1}(f(x))$$

即 $\forall y\in f(X)$, $f^{-1}(-y)=-f^{-1}(y)$

所以 f^{-1} 也是奇函数

(§1.4 请自学)

* 例. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上定义, $x_1,x_2>0$

证明 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降

则 $f(x_1+x_2)\leq f(x_1)+f(x_2)$

提示: 不妨设 $x_1\leq x_2$.