Week 4 Lecture 5

Plan: 序列极限的性质

序列的主要问题 { 收敛?
求极限?

Def: 设 $\{x_n\}$ 序列

若 $\exists M>0$, s.t. $\forall n\in\mathbb{N}$, 有 $|x_n|<M$

则称 $\{x_n\}$ 是有界的

(数集 $\{x_n\}$ 是有界集)

记号: ① $\{x_n\}$ 有界, $x_n=O(1)$,

② 若 $\exists M_2>M_1>0$, $N\in\mathbb{N}$, s.t.

当 $n>N$ 时 $M_1<|x_n|<M_2$, 则 $x_n=O_0(1)$。

定理 2.2.1

(1) 改变 $\{x_n\}$ 有限项, 不改变收敛性

和极限值(若存在)

(2) 收敛序列的极限唯一

(3) 收敛序列有界.

证明: (1) 略

(2) 反证

设 $\exists$ 序列 $\{x_n\}$, s.t. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,

且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$ 而 $a\neq b$

不妨设 $a<b$, 令 $\varepsilon_0=\frac{b-a}{2}>0$

则由定义 $\exists N_1\in\mathbb{N}$, $N_2\in\mathbb{N}$ s.t.

$|x_n-a|<\varepsilon_0$, $\forall n>N_1$

$|x_n-b|<\varepsilon_0$, $\forall n>N_2$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$ 则有

$\frac{a+b}{2}=b-\varepsilon_0<x_n<a+\varepsilon_0=\frac{a+b}{2}$

矛盾, 故原命题成立

(3) 考虑

$|x_n|=|x_n-a+a|<|a|+|x_n-a|$

具体略.

定理 2.2.2 (保序性)

设 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 两序列 有

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$

则 (1) 若 $a<b$ 则 $\forall c\in(a,b)$ $\exists N_0\in\mathbb{N}$

s.t. 当 $n>N_0$ 时 $x_n<c<y_n$

(2) 若 $\exists N_0>0$, s.t. 当 $n>N_0$ 时

有 $x_n\leq y_n$ 则 $a\leq b$。

证明:

(1) 取 $\varepsilon_0=\min\{c-a,b-c\}$ 易证

(2) 反证 若 $a>b$, 取 $c=\frac{a+b}{2}$ 易证

注: (2) 中, 即使 $\forall n\in\mathbb{N}$ 有

$x_n<y_n$, 也未必有 $a<b$

例如 $x_n=1-\frac{1}{n}$, $y_n=1+\frac{1}{n}$

显然, $x_n<y_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1$

定理 2.2.3 (极限四则运算)

设 $\lim\limits_{x\to n} x_n = a$, $\lim\limits_{x\to n} y_n = b$

则 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, 其中 $b\neq 0, y_n \neq 0$

证明: (1) 略

(2) 注意:

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - y_n a + y_n a - ab| \\ &\leq |x_n y_n - y_n a| + |y_n a - ab| \\ &\leq |y_n|\,|x_n - a| + |a|\,|y_n - b| \end{aligned}$$

由有界性知, $\exists M>0$, s.t. $\forall n$, $|y_n| < M$,

取 $M = \max\{M, |a|\} > 0$,

由定义知, $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ s.t.

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \forall n > N_1$$

$$|y_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \forall n > N_2$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则 当 $n > N$ 时

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &\leq |y_n|\,|x_n - a| + |a|\,|y_n - b| \\ &\leq M\,(|x_n - a| + |y_n - b|) \\ &\leq M\left(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M}\right) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$

(3) 只需证 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$.

注意 $\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{y_n - b}{y_n b}\right| \leq \frac{1}{|y_n|}\,|y_n - b|$

利用 $\frac{1}{|y_n|}$ 有界, $|y_n - b| = o(1)$. 略

例 2.2.1 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n-100}{4n^2+5n+10^5}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{4}{n} - \frac{100}{n^2}}{4 + \frac{5}{n} + \frac{10^5}{n^2}}$$

$$= \frac{3+0+0}{4+0+0} = \frac{3}{4}.$$

② 当 $|q|<1$

$$\lim_{n\to\infty}(1 + q + q^2 + \cdots + q^n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

定理 2.2.4 (夹逼收敛定理)

设序列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$

$$x_n \leq z_n \leq y_n, \quad \forall n > N_0$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

证: $a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$

略.

例 2.2.2. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_1^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}}$ $(a_i > 0, i = 1, \cdots, m)$

解 (1) 令 $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$, 则 $h_n > 0$

且 $n = (1+h_n)^n$

$$= 1 + n h_n + \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 + \cdots + h_n^n$$

$$> \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 \quad (n>3)$$

则 $h_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$, $n>3$

由 $0<h_n<\frac{2}{n+1}$, $\forall n\geq 3$

则由夹逼收敛定理 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n=0$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+h_n)=1$

(2) 令 $a=\max\{a_1,\cdots,a_m\}$, 则

$$a^n\leq a_1^n+\cdots+a_m^n\leq m a^n$$

于是 $a\leq(a_1+\cdots+a_m)^{\frac{1}{n}}\leq\sqrt[n]{m}\,a$

当 $n\geq m$ 时 $1\leq\sqrt[n]{m}\leq\sqrt[n]{n}$

由夹逼收敛定理 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1$

再由夹逼收敛定理知

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+\cdots+a_m)^{\frac{1}{n}}=a=\max\{a_1,\cdots,a_m\}.$$

例 2.2.3 略

例 2.2.4 设 $a_1=2$, $a_{n+1}=2+\frac{1}{a_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

问 $\{a_n\}$ 是否收敛, 若收敛求极限.

分析: 若有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则

$$a=2+\frac{1}{a}$$

而 $a_n>0$, 只能有 $a=\sqrt{2}+1$

则若令 $a_n=\sqrt{2}+1+h_n$,

$\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $h_n=o(1)$ $(n\to\infty)$.

解: 令 $a_n=\sqrt{2}+1+h_n$, $n=1,2,\cdots$

则 $1+\sqrt{2}+h_{n+1}=2+\frac{1}{1+\sqrt{2}+h_n}$

即有 $h_{n+1}=\frac{h_n(1-\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}+h_n}$

① 有界, $h_1=1-\sqrt{2}$, $|h_1|<1$

若 $|h_k|<1$,

$$|h_{k+1}|<\frac{|h_k|}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)<1$$

则 $\forall n\in\mathbb{N}$, $|h_n|<1$

② 收敛 由 $|h_n|<1$

$$|h_{n+1}|\leq\left|\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+h_n}\right||h_n|$$

$$\leq\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}|h_n|$$

又注意 $|h_n|>0$

则 $0<|h_n|<\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}|h_1|$

由夹逼定理知, $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$.

因此 $\{a_n\}$ 收敛, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2}+1$.

最后讨论无穷小量的四则运算

若 $x_n=o(1)$ $(n\to\infty)$, $y_n=o(1)$ $(n\to\infty)$

则 ① $x_n\pm y_n=o(1)$ $(n\to\infty)$

② $x_n y_n=o(1)$ $(n\to\infty)$

而 $\frac{x_n}{y_n}$ 不定, 记为不定式 $\frac{0}{0}$

类似地 ① $\pm\infty+(\pm\infty)=\pm\infty$

② $\infty\cdot\infty=\infty$

③ $\infty\cdot O_0(1)=\infty$

但 $(\pm\infty)-(\pm\infty)$, $\frac{\infty}{\infty}$ 是不定式.