Week 7. Lecture 9

Plan: 1. 函数极限的定义

2. 性质和推广

$f(x)$ 在 x_0 的极限

① x "充分接近" x_0

② $f(x)$ 在 $U_0(x_0,\delta)$ 的趋向行为

Def 设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}_0(x_0,\delta_0)$ $(\delta_0>0)$ 内有定义，若 $\exists A$ s.t. $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$

当 $x\in \mathring{U}_0(x_0,\delta)$ 时 $(0<|x-x_0|<\delta)$

有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

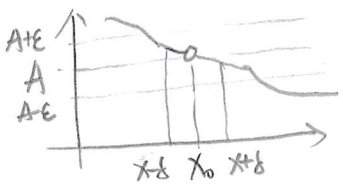
则称当 x 趋于 x_0 时 $f(x)$ 以 A 为极限

记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to x_0)$

注：$f(x)$ 在 x_0 未必有定义

若有定义，未必有 $f(x_0)=A$.

※ 几何意义



$x\in \mathring{U}_0(x_0,\delta)$

则 $f(x)\in U(A,\varepsilon)$

例 3.1.1 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1}{2}$

分析 $\left|\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{2}\right|$

$$=\left|\frac{2-(\sqrt{x}+1)}{2(\sqrt{x}+1)}\right|$$

$$=\left|\frac{x-1}{2(\sqrt{x}+1)^2}\right|$$

$$(|x-1|<1)\ \le \frac{1}{2}|x-1|$$

证明：$\forall \varepsilon>0$ 取 $\delta=\min\{1,2\varepsilon\}$

则当 $|x-1|<\delta$ 时

$$\left|\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}|x-1|<\varepsilon$$

则 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1}{2}$.

例 3.1.2 证明 $\lim\limits_{x\to 2}x^4=16$

证明：$|x^4-16|=|x-2|\,|x^3+2x^2+4x+8|$

若 $|x-2|<1$，有 $|x|<3$

则 $|x^4-16|<65|x-2|$

$\forall \varepsilon>0$，取 $\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{65},1\}$ 则

当 $0<|x-2|<\delta$ 时 $|x^4-16|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{x\to 2}x^4=16$

类似地 $\lim\limits_{x\to a}x^n=a^n$

※ 函数极限的性质

——唯一性，有界性

定理 3.1.1 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在

则 ① 极限值唯一

② $\exists \delta_0>0$, s.t. $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 有界

证略

——保序性

定理 3.1.2 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$

(1) 若 $\exists \delta_0>0$ s.t. 当 $x\in \mathring{U}_0(x_0,\delta_0)$ 时

$f(x)\le g(x)$，则 $A\le B$

(2) 若 $A<B$ 则 $\forall C\in(A,B)$ $\exists \delta_C>0$

s.t. 当 $x\in \mathring{U}_0(x_0,\delta_C)$ $f(x)<C<g(x)$

证略

一、四则运算

定理 3.1.3 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = A\pm B$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B$.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ $(B\neq 0)$

只证明 (3)；在 x_0 附近有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\right| = \frac{|Bf(x)-Ag(x)|}{|Bg(x)|}$$

$$= \frac{|Bf(x)-AB+AB-Ag(x)|}{|Bg(x)|}$$

$$\leq \frac{|B|\,|f(x)-A|+|A|\,|B-g(x)|}{|B|\,|g(x)|}$$

由 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B\neq 0$, $\exists \delta_0>0$ s.t.

当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$ $|g(x)-B|<\dfrac{|B|}{2}$

则 $g(x)\geq |B|-|g(x)-B|\geq \dfrac{|B|}{2}$

于是 $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{A}{B}\right|$

$$\leq \frac{2}{|B|}|f(x)-A|+\frac{2|A|}{|B|^2}|g(x)-B|$$

由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$

$\exists \delta_1,\delta_2>0$ s.t.

当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_1)$, $|g(x)-B|<\dfrac{B^2}{4(|A|+1)}\varepsilon$

当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_2)$, $|f(x)-A|<\dfrac{|B|}{4}\varepsilon$.

取 $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1,\delta_2\}$ 则

当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时 $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{A}{B}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

即证了 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$

例 3.1.5 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1+x^2-1+\cdots+(x^n-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[1+(x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)\right]$$

$$= 1+2+\cdots+n$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)$$

二、复合函数

定理 3.1.4. 设 $f(u)$ 在 $\mathring{U}(u_0,\delta_1)$ $(\delta_1>0)$ 上有定义，$u=g(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ $(\delta_0>0)$ 上有定义，当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时，有 $g(x)\in \mathring{U}(u_0,\delta_1)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$

而且 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = A.$$

证明：两次用定义略

例 3.1.6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^2+x}$

取 $u=g(x)=x^2+x+1$，考虑 $f(u)=\dfrac{\sqrt{u}-1}{u-1}$

则 $\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{\sqrt{u}-1}{u-1}=\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{u}+1}=\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1$$

（易知满足定理 3.1.4 的条件）

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))=\dfrac{1}{2}$.

注：定理3.1.4中 $g(x)\in \mathring{U}_0(u_0,\delta_1)$

不可换成 $g(x)\in U(u_0,\delta_1)$

考虑 $f(u)=\begin{cases}0, & u=0\\ 1, & u\neq 0\end{cases}$

$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x=\frac{1}{n}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

则 $f(g(x))=\begin{cases}1 & x=\frac{1}{n}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

若取 $x_0=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$

而 $\lim\limits_{u\to 0} f(u)=1$

但是 $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))$ 不存在（练习）

一 夹逼收敛定理

定理3.1.5 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$

且 $\exists \delta_0>0$，s.t. 当 $x\in \mathring{U}_0(x_0,\delta_0)$ 时

$$f(x)\le g(x)\le h(x)$$

则有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$.

二 极限的推广

记号 $U^+(x_0,\delta)=[x_0,x_0+\delta)$

$U^-(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0]$

$\mathring{U}_0^+(x_0,\delta)=(x_0,x_0+\delta)$

$\mathring{U}_0^-(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)$

$\{x:|x|>h\}$ $(h>0)$ ∞ 的邻域

记为 $U(\infty,h)$ 或 $U(\infty)$

$U^+(\infty,h)=(h,+\infty)$ $(U^+(\infty),U(+\infty))$

$U^-(\infty,h)=(-\infty,-h)$ $(U^-(\infty),U(-\infty))$

自变量的行为

$x\to x_0$，$x\to x_0+0$，$x\to x_0-0$

$x\to\infty$，$x\to\pm\infty$.

函数的行为

$f(x)\to A$，$f(x)\to\pm\infty$，$f(x)\to\infty$.

注意不定式

$+\infty+(-\infty)$，$-\infty+(+\infty)$，

$0\cdot\infty$，$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$.

定理3.1.6 $f(x)$ 在 x_0 极限存在

$\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 的左右极限存在且相等.

证略

记号 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$

$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$