高等数学A第一次作业答案

课程助教组

2020.10

1 习题1.3

Proof. 本题答案：$(-1,1)$。

我们指出，$\cup_{n=1}^{\infty}A_n$指无穷多个集合的并集，即只要在任意一个A_n里的元素即在并集$\cup_{n=1}^{\infty}A_n$之内。

为了证明$\cup_{n=1}^{\infty}A_n=(-1,1)$，我们分为两部分：首先，对于一切$n$有

$$\left[-1+\frac{1}{2n},1-\frac{1}{n}\right]\subset(-1,1), \tag{1}$$

因此

$$\cup_{n=1}^{\infty}\left[-1+\frac{1}{2n},1-\frac{1}{n}\right]\subset(-1,1).$$

下面证明$(-1,1)\subset\cup_{n=1}^{\infty}A_n$。对于$\forall a\in(-1,1)$，我们可以取一个足够大的$M\in\mathbb{N}^*$使得

$$a\in\left[-1+\frac{1}{2M},1-\frac{1}{M}\right].$$

这里足够大的意思是

$$M>\max\{\frac{1}{2a+2},\frac{1}{1-a}\}.$$

所以$a\in\cup_{n=1}^{\infty}A_n$，即推出

$$(-1,1)\subset\cup_{n=1}^{\infty}\left[-1+\frac{1}{2n},1-\frac{1}{n}\right]. \tag{2}$$

结合(1)、(2)两式知

$$(-1,1)=\cup_{n=1}^{\infty}\left[-1+\frac{1}{2n},1-\frac{1}{n}\right].$$

□

2 习题1.4

Proof. 本题答案$[-1,1]$，方法如题1.3。不过需要注意区间的开闭是不同的。

□

3 习题1.5

Proof. 无界的肯定叙述：对于$\forall M \in \mathbb{R}$，均存在$x \in X$，使得$x > |M|$。

集合A无界的证明：取$n = 4k+1$其中$k \in \mathbb{N}$，那么

$$n \sin \frac{n\pi}{2} = (4k+1) \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (4k+1).$$

考虑到集合$\{4k+1 \,|k \in \mathbb{N}\}$无界，故集合$A$无界。

□

4 习题1.6

Proof. 1）$\sup E = 3$，$\inf E = 0$。

2）$\sup E = 1$，$\inf E = 0$。利用实数稠密性定理，即任意两个实数之间存在无理数。

3）$\sup E = \sqrt{5}$，$\inf E = 1$。

先证明$\inf E = 1$。首先1一定是E一个下界。其次，对于$\forall \varepsilon > 0$，我们可以取一个足够大的正奇数N，满足$2^{-N} < \varepsilon$那么

$$1 + 2^{-N} < 1 + \varepsilon < (1+\varepsilon)^N,$$

那么

$$\sqrt[N]{1 + 2^{N(-1)^N}} = \sqrt[N]{1 + 2^{-N}} < 1 + \varepsilon.$$

考虑到 $\sqrt[N]{1 + 2^{N(-1)^N}} \in E$，下确界命题得证。

在证明$\sup E = \sqrt{5}$。我们首先证明序列$a_k = \sqrt[2k]{1 + 2^{2k}}$是单调递减的。这一证明分为几步：

1）对于一切k，我们有

$$a_k = \sqrt[2k]{1 + 2^{2k}} > \sqrt[2k]{2^{2k}} = 2.$$

2）对于一切k，我们有

$$a_k^{2k} = 1 + 4^k.$$

在上式左右同乘以4得到

$$1+4^{k+1}<4+4^{k+1}=4a_k^{2k}<a_k^{2k+2},$$

考虑到

$$a_{k+1}^{2k+2}=1+4^{k+1}<a_k^{2k+2},$$

因此$a_{k+1}<a_k$，序列递减。

对于集合E而言，如果n是奇数，那么

$$\sqrt[n]{1+2^{-2n}}<1+2^{-2n}\leq\frac{5}{4}.$$

如果n是偶数，依据序列递减

$$\sqrt[n]{1+2^{2n}}\leq\sqrt{1+4}=\sqrt{5}.$$

因此$\sqrt{5}$是E一个上界。

又$n=2$时$\sqrt[n]{1+2^{2n}}=\sqrt{5}$，因此$\sup E=\sqrt{5}$.

4）$\sup E=1$，$\inf E=0$。

□

5 习题1.7

Proof. 一方面，对于$z=x+y\in C$，其中$x\in A$，$y\in B$，我们有

$$x\leq\sup A,\quad y\leq\sup B,$$

因此对于一切$z\in C$有

$$z\leq\sup A+\sup B,$$

进一步

$$\sup C\leq\sup A+\sup B. \tag{3}$$

另一方面，对于一个固定的$x_0\in A$，任取$y\in B$，必有$z=x_0+y\in C$。考虑到

$$z\leq\sup C,$$

那么对于一切的y均有

$$y\leq\sup C-x_0.$$

由于上式右侧为一定值，左侧选择有任意性，故

$$x_0+\sup B\leq\sup C.$$

再根据

$$x_0 \leq \sup C - \sup B,$$

对于一切$x_0 \in A$成立，右侧为定值，所以

$$\sup A \leq \sup C - \sup B.$$

即证明

$$\sup A + \sup B \leq \sup C. \tag{4}$$

结合(3)、(4)式命题得证。

□

6 习题1.13

Proof. 答案$f(x) = \frac{x^2+2x-1}{3}$。

根据原函数方程和换元（$x = 1 - x$）得到

$$2f(x) + f(1-x) = x^2,$$
$$2f(1-x) + f(x) = (1-x)^2.$$

联立求解可得答案。

□

7 习题1.14

Proof. 答案$f(x) = x^2 - 2, x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$。

依据题意

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2.$$

可得答案。不过注意文明只能确定函数在$x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$的取值。

□

8 习题1.15

Proof. 根据函数非负的性质，我们可以证明$f(x)$和$g(x)$的上下确界均非负。因此

$$\inf_{x \in D} f(x) \cdot \inf_{x \in D} g(x) \leq f(y)g(y),$$

对于一切$y \in D$成立。因此

$$\inf_{x\in D} f(x) \cdot \inf_{x\in D} g(x) \leq \inf_{x\in D} f(x)g(x).$$

另一方面，如果存在$x \in D$使得$f(x) = 0$，那么必然有

$$\inf_{x\in D}[f(x)g(x)] = 0,$$

不等式

$$\inf_{x\in D}[f(x)g(x)] \leqslant \sup_{x\in D} f(x) \inf_{x\in D} g(x),$$

立刻得证。

如果$f(x) > 0$对一切$x \in D$成立，我们完成证明。对于一切$y \in D$有

$$g(y) = \frac{f(y)g(y)}{f(y)},$$

根据$f(y) \neq 0$，它可以位于分母。又因为

$$f(y)g(y) \geq \inf_{x\in D}[f(x)g(x)],$$

和

$$f(y) \leq \sup_{x\in D} f(x).$$

因此对于一切$y \in D$有

$$g(y) \geq \frac{\inf_{x\in D}[f(x)g(x)]}{\sup_{x\in D} f(x)},$$

因此

$$\inf_{x\in D} g(x) \geq \frac{\inf_{x\in D}[f(x)g(x)]}{\sup_{x\in D} f(x)}.$$

9 习题1.16

1）利用确界的定义，证明$-f(x)$的上确界是$-\inf_{x\in D} f(x)$。我们分两步证明。

第一步，$-\inf_{x\in D} f(x)$是$-f(x)$上界：对于$\forall y \in D$有

$$\inf_{x\in D} f(x) \leq f(y).$$

因此对于一切$y \in D$

$$-\inf_{x\in D} f(x) \geq -f(y),$$

因此$-\inf_{x\in D} f(x)$是$-f(x)$上界。

第二步$\forall \epsilon > 0 \quad \exists x_0 \in D$使得$-\inf_{x\in D} f(x) - \epsilon < x_0$.

我们从$\inf_{x\in D} f(x)$出发，根据下确界的定义，$\forall \epsilon > 0 \quad \exists x_0 \in A$使得

$$\inf_{x\in D} f(x) \leq x_0 < \inf_{x\in D} f(x) + \epsilon$$

那么x_0同样满足

$$-\inf_{x\in D} f(x) - \epsilon < x_0.$$

结合上述两部分，$-f(x)$的上确界是$-\inf_{x\in D} f(x)$。

2）此问与第一问方法相同。

□