高等数学A第十次作业答案

课程助教组

2020.12

1 习题5.31

Proof. 3）我们知道

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o(x^n),$$

因此计算乘积

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x)^2} &= \left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o(x^n)\right]^2\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)x^k+o(x^n)\end{aligned}$$

4）进行变形

$$\frac{x^3+2x+1}{x-1}=x^2+x+3-\frac{4}{1-x},$$

再进行泰勒展开

$$\frac{x^3+2x+1}{x-1}=\begin{cases}-1+o(1), & k=0,\\ -1-3x+o(x), & k=1,\\ -1-3x-3x^2+o(x^2), & k=2,\\ -1-3x-3x^2-\sum_{k=3}^{n}4x^k+o(x^n), & k\geq 3.\end{cases}$$

□

2 习题5.32

Proof. 3）进行变形

$$\frac{x}{2x^2+x-1}=\frac{1}{2x-1}\cdot\left(1-\frac{1}{x+1}\right)$$

分别泰勒展开得到

$$\begin{aligned} & \frac{x}{2x^2+x-1} \\ = \ & \left(-1-2x-4x^2-8x^3+o(x^3)\right)\left(x-x^2+x^3+o(x^3)\right) \\ = \ & -x-x^2-3x^3+o(x^3) \end{aligned}$$

4）进行变形

$$\ln\frac{1+x}{1-2x}=\ln(1+x)-\ln(1-2x).$$

分别泰勒展开得到

$$\begin{aligned} & \ln\frac{1+x}{1-2x} \\ = \ & \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}-\frac{(-1)^{k-1}(-2)^kx^k}{k}\right)+o(x^n) \\ = \ & \sum_{k=1}^{n}\frac{2^k+(-1)^{k-1}}{k}x^k+o(x^n) \end{aligned}$$

□

3 习题5.33

Proof. 1）进行泰勒展开，选择$o(x^5)$作为余项

$$\begin{aligned} & (a+b\cos x)\sin x-x \\ = \ & \left(a+b-\frac{b}{2}x^2+\frac{b}{24}x^4+o(x^5)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)-x. \end{aligned}$$

比对各次项系数

$$\begin{cases} \text{一次：} & a+b=1, \\ \text{三次：} & \frac{a+b}{6}+\frac{b}{2}=0. \end{cases}$$

解得

$$a=\frac{4}{3},b=-\frac{1}{3}.$$

□

4 习题5.34

Proof. 3）进行换元$x = t^{-1}$得到

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-3x}-\sqrt{x^2-2x}\right)\\
=&\lim_{t\to0+0}\frac{\sqrt[3]{1-3t^2}-\sqrt{1-2t}}{t}\\
=&\lim_{t\to0+0}\frac{\left[1+\frac{(-3t^2)}{3}+o(t^3)\right]-\left[1+\frac{(-2t)}{2}+o(t)\right]}{t}\\
=&\lim_{t\to0+0}\frac{t+o(t)}{t}=1
\end{aligned}$$

5）取对数得到

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\\
=&\lim_{x\to0}\exp\left(\frac{\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)}{x^2}\right)\\
=&\exp\left[\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{3}+o(x^3)\right)}{x^2}\right]\\
=&\exp\left[\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{x^2}{3}+o(x^3)\right)+o(x^3)}{x^2}\right]\\
=&\sqrt[3]{e}
\end{aligned}$$

□

5 习题5.35

Proof. 1）在$x=0$进行二阶泰勒展开

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)\\
=&\lim_{x\to0}\left(\frac{3x-\frac{9}{2}x^3+o(x^4)}{x^3}+\frac{f(0)+f'(0)x+\frac{x^2f''(0)}{2}+o(x^2)}{x^2}\right)\\
=&\lim_{x\to0}\left(3+f(0)\right)\frac{1}{x^2}+\frac{f'(0)}{x}+\left(\frac{f''(0)}{2}-\frac{9}{2}\right)+o(1). \qquad (1)
\end{aligned}$$

因此

$$f(0)=-3, f'(0)=0, f''(0)=9.$$

2）对极限在$x=0$进行二阶泰勒展开

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^2}+\frac{f(x)}{x^2}\right)\\=&\lim_{x\to 0}\frac{3+f(0)+f'(0)x+\frac{x^2f''(0)}{2}+o(x^2)}{x^2}\\=&\lim_{x\to 0}\frac{f''(0)}{2}=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

□

6 习题5.36

Proof. 1）对极限取对数得到

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}=3.$$

此式的分子分母都是无穷小量，利用等价无穷小代换得到

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}=3.$$

再在$x=0$进行二阶泰勒展开

$$\lim_{x\to 0+0}\left[1+\frac{1}{x^2}\left(f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+o(x^2)\right)\right]=3.$$

对比系数得$f(0)=f'(0)=0$和$f''(0)=4$。

2）由于$f(x)$和$\frac{f(x)}{x}$在$x\to 0$是无穷小量，我们利用特殊极限方法

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\\=&\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x^2}}\\=&\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\right)=e^2\end{aligned}$$

□

7 习题5.37

Proof. 考虑极限$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^n}$，用洛必达法则计算$n$次

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}=\frac{B}{n!}$$

考虑到$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A < +\infty$，因此

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^n} = 0,$$

因此$B = 0$。 □

注解 1. 洛必达法则的$\frac{0}{0}$情况（定理*5.2.1*）需要分子分母均为无穷小量才可以使用，但是$\frac{\infty}{\infty}$情况（定理*5.2.3*）则只需分母是无穷大量。这一点与*Stolz*定理的两种形式一致。

8 习题5.39

Proof. 1）对一切$x > a$在a处进行泰勒展开

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} P^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi(x)) > \frac{(x-a)^n}{n!} P^{(n)}(\xi(x)),$$

其中$\xi(x) \in (a, x)$。

由于$P(x)$是n次多项式，因此$P^{(n)}(x)$是一个常数，即

$$P^{(n)}(\xi(x)) = P^{(n)}(a) > 0,$$

故$P(x) > 0$。换言之，$P(x)$在$(a, +\infty)$没有零点。

2）不妨$P(a) > 0$。对一切$x < a$在a处进行泰勒展开

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} P^{(k)}(a) + (-1)^n \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi(x)),$$

由于$(x-a)^k P^{(k)}(a) > 0$对一切k成立，则

$$P(x) > \frac{(x-a)^n}{n!} P^{(n)}(\xi(x)),$$

其中$\xi(x) \in (a, x)$。

由于$P(x)$是n次多项式，因此$P^{(n)}(x)$是一个常数，即

$$\operatorname{sgn}\left(P^{(n)}(\xi(x))\right) = \operatorname{sgn}\left(P^{(n)}(a)\right),$$

因此

$$\frac{(x-a)^n}{n!} P^{(n)}(\xi(x)) > 0,$$

故$P(x) > 0$。换言之，$P(x)$在$(a, +\infty)$没有零点。 □

9 习题5.43

Proof. 在每一个$x \in (0,+\infty)$进行三阶泰勒展开

$$\begin{cases} f(x+1)-f(x)=f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi_1), \\ f(x-1)-f(x)=-f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2), \end{cases}$$

其中$x-1<\xi_2<x<\xi_1<x+1$。

求解方程得

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[f(x+1)-f(x-1)-\frac{f'''(\xi_2)}{6}-\frac{f'''(\xi_1)}{6}\right],$$

和

$$f''(x)=f(x+1)+f(x-1)-2f(x)+\frac{f'''(\xi_2)}{6}-\frac{f'''(\xi_1)}{6}.$$

利用$f(x)$和$f'''(x)$有界得

$$|f'(x)|\leq\frac{1}{2}\left[|f(x+1)|+|f(x-1)|+\frac{|f'''(\xi_2)|}{6}+\frac{|f'''(\xi_1)|}{6}\right]\leq M_0+\frac{M_3}{6},\forall x,$$

和

$$|f''(x)|=|f(x+1)|+|f(x-1)|+2|f(x)|+\frac{|f'''(\xi_2)|}{6}+\frac{|f'''(\xi_1)|}{6}\leq 4M_0+\frac{M_3}{3},\forall x.$$

因此$f'(x)$和$f''(x)$都有界。

□

10 习题5.44

Proof. 1）对$y=\ln(1+x)$用泰勒展开，考虑$x\in(0,1]$，

$$\ln(1+x)=x-\frac{\xi^2}{2}<x,$$

其中$\xi\in(0,x)$。另一方面

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{\eta^3}{2}>x-\frac{x^2}{2},$$

其中$\eta\in(0,x)$。结合上述分析，不等式得证。

2）根据第一问结论有

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]<\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right],$$

由于极限$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$存在，因此对于$\forall n\in\mathbb{N}^*$有$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]$单调有界，因此极限存在。

□

11 习题5.45

利用二阶泰勒展开

$$\begin{cases} f(\frac{b+a}{2}) = f(a) + \frac{b-a}{2}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{8}f''(\xi_1), \\ f(\frac{b+a}{2}) = f(b) - \frac{b-a}{2}f'(b) + \frac{(b-a)^2}{8}f''(\xi_2), \end{cases}$$

其中$a < \xi_1 < \frac{a+b}{2} < \xi_2 < b$。借助题设联立得

$$f(b) - f(a) = \frac{(b-a)^2}{8}(f''(\xi_1) - f''(\xi_2)).$$

利用三角不等式

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{8}(|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|).$$

根据达布定理（需要分绝对值正负情况讨论），存在$\xi \in (\xi_1, \xi_2)$使得$|f''(\xi)| = \frac{|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|}{2}$，此时

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{8}|f''(\xi)|.$$