# 高等数学A第十一次作业习题答案

课程助教组

2020.12

## 1 习题5.49.(1)

*Proof.* 只需证$f(x)=x\ln(1+\frac{1}{x})$严格单增。。

$$f'(x)=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}$$

可证$f'(x)>0$（譬如令$t=\frac{1}{x}$）,因此$f$严格单调。 □

## 2 习题5.49.(3)

由(2),

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

严格单调递减.且

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=e.$$

因此,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

## 3 习题5.50.(2)

直接求导计算，当$x=-1$时，极小值为$y=-1$；当$x=1$时，极大值为$y=1$.

## 4 习题5.50.(3)

直接求导计算，当$x=1$时，极小值$y=0$；当$x=e^2$时，极大值$y=\frac{4}{e^2}$.

## 5 习题5.51.(2)

直接计算，当$x=\frac{\pi}{4}$时，最大值为$y=1$,无最小值.

## 6 习题5.51.(3)

直接计算，当$x=e^{-2}$时，最小值为$y=-\frac{2}{e}$,无最大值.

## 7 习题5.58

由凸函数定义，直接验证

$$\begin{aligned} F(\lambda x+(1-\lambda)y) =& \max\{f(\lambda x+(1-\lambda)y), g(\alpha x+(1-\lambda)y)\} \\ \leq& \max\{\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y), \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)\} \\ \leq& \lambda F(x)+(1-\lambda)F(y). \end{aligned}$$

## 8 习题5.59

*Proof.*

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=1.$$

另一方面，

$$f'(x)=1+4x\sin\frac{1}{x}-2\cos\frac{1}{x},$$

取$x_n=\frac{1}{2n\pi}$, $y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$,可见$f'(x)$在$x=0$的任意邻域内不是保号的，因此不是单调上升的。 □

## 9 习题5.62

*Proof.* 设四次多项式形如

$$P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4.$$

在二阶可导条件下，凸函数等价于$P''(x) \geq 0$,即

$$12a_0x^2 + 6a_1x + a_2 \geq 0.$$

特别地，解二次多项式，得到

$$\begin{cases} a_0 > 0, \\ 3a_1^2 - 8a_1a_2 \leq 0. \end{cases}$$

□

## 10 习题5.65

*Proof.* (1).在$x = x_0$处Taylor展开，得到

$$f'(x) = \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi)$$

由$n$为奇数，且$f^{(n)}(\xi) > 0$，因此

$$\begin{cases} f'(x) > 0, & x \neq x_0, \\ f'(x) = 0, & x = x_0. \end{cases}$$

注意到在$(a, b)$上严格单增，只需分别在$(a, x_0]$和$[x_0, b)$上严格单增。

(2).注意到

$$f''(x) = \frac{(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n)}(\eta).$$

证明和(1)是类似的。 □

## 11 习题5.67

*Proof.* (1).过点$(x_0, y_0)$的切线方程

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

得到交点$A=(\frac{a^2}{x_0},0)$, $B=(0,\frac{b^2}{y_0})$,因此

$$|AB|^2=\frac{a^4}{x_0^2}+\frac{b^4}{y_0^2}$$

其中$(x_0,y_0)$位于椭圆上，即

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1.$$

令$t=x_0^2$,需要求

$$|AB|^2=\frac{a^4}{t}+\frac{a^2b^2}{a^2-t}$$

关于变量$t\in[-a^2,a^2]$的最小值。证明方法多样，为了完整性，这里提供一种证明。

利用$f=\ln x$的上凸性质，可得

$$\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\geq\frac{1}{\frac{\lambda}{x_1}+\frac{1-\lambda}{x_2}}.$$

其中$\lambda\in(0,1)$, $x_1,x_2>0$.

令

$$\lambda x_1=\frac{a^4}{t},\quad (1-\lambda)x_2=\frac{a^2b^2}{a^2-t}$$

代入上述不等式，得到

$$\begin{aligned}\frac{a^4}{t}+\frac{a^2b^2}{a^2-t}=&\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\\ \geq&\frac{1}{\frac{\lambda}{x_1}+\frac{1-\lambda}{x_2}}\\ =&\frac{a^4b^2}{\lambda^2b^2t+(1-\lambda)^2a^2(a^2-t)}\end{aligned}$$

取$\lambda\in(0,1)$满足

$$\lambda^2b^2=(1-\lambda)^2a^2,$$

即$\lambda=\frac{a}{a+b}$,代入得到

$$\frac{a^4}{t}+\frac{a^2b^2}{a^2-t}\geq(a+b)^2.$$

因此，我们证明了一个下界是$(a+b)^2$。另外，上述不等式的取等条件是可以实现的。综上，$|AB|$最小值为$a+b$.

(2).

$$S_{ABO}^2=\frac{1}{4}\frac{a^4b^4}{x_0^2y_0^2}$$

即求$x_0^2y_0^2$的最大值。采用求导方法，可得最小面积为$ab$. □