高等数学A第二次作业习题答案

课程助教组

2020.10

1 习题1.19

(1) $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$. 不妨令

$$y=\frac{1-x}{1+x},\quad x\neq -1.$$

反解得到

$$x=\frac{1-y}{1+y},\quad y\neq -1.$$

(2)

$$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\in(-\infty,1],\\ x^2, & x\in(1,10],\\ 72\ln x, & x\in(10,+\infty);\end{cases}$$

可见

$$f(x)\in\begin{cases}(-\infty,1], & x\in(-\infty,1],\\ (1,100], & x\in(1,10],\\ (72\ln 10,+\infty], & x\in(10,+\infty);\end{cases}$$

反解得到

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{2}, & x\in(-\infty,1],\\ \sqrt{x}, & x\in(1,10],\\ e^{\frac{x}{72}}, & x\in(10,+\infty);\end{cases}$$

(3) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leq x\leq 0)$;

反解得到

$$x=-\sqrt{1-y^2},\quad y\in[0,1].$$

即

$$f^{-1}(x)=-\sqrt{1-x^2}\quad x\in[0,1].$$

2 习题1.20

设$f(x)=x^2-2x$, $g(x)=\begin{cases}x, & x<2,\\ 4-x, & x\geq 2,\end{cases}$求$f(g(x))$, $g(f(x))$, $g(g(x))$的表达式.

直接带入计算得到

$$f(g(x))=\begin{cases}x^2-2x, & x<2,\\ x^2-6x-8, & x\leq 2.\end{cases}$$

分情况讨论：$f(x)<2$和$f(x)\geq 2$.计算得到

$$\{x:f(x)<2\}=(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}),\quad \{x:f(x)\geq 2\}=(-\infty,1-\sqrt{3}]\bigcup[1+\sqrt{3},+\infty).$$

则

$$g(f(x))=\begin{cases}x^2-2x, & x\in(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}),\\ 4-x^2+2x, & x\in(-\infty,1-\sqrt{3}]\bigcup[1+\sqrt{3},+\infty).\end{cases}$$

类似地，

$$g(g(x))=\begin{cases}x, & x<2,\\ 4-x, & x\leq 2.\end{cases}$$

3 习题1.21

设$f(x)=|x+1|-|x-1|$,求n次复合函数.

$$f(x)=\begin{cases}-2, & x\in(-\infty,-1],\\ 2x, & x\in(-1,1),\\ 2, & x\in[1,+\infty);\end{cases}$$

计算得到

$$\{x:f(x)\in(-\infty,-1]\}=(-\infty,-\frac{1}{2}],$$
$$\{x:f(x)\in(-1,1)\}=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}),$$
$$\{x:f(x)\in(1,+\infty)\}=(\frac{1}{2},+\infty);$$

则

$$f(f(x))=\begin{cases}-2, & x\in(-\infty,-\frac{1}{2}],\\ 4x, & x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\\ 2, & x\in[\frac{1}{2},+\infty);\end{cases}$$

归纳地，设

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}-2, & x\in(-\infty,-\frac{1}{2^{n-1}}],\\ 2^n x, & x\in(-\frac{1}{2^{n-1}},\frac{1}{2^{n-1}}),\\ 2, & x\in[\frac{1}{2^{n-1}},+\infty);\end{cases}$$

计算得到

$$\left\{x:f(x)\in(-\infty,-\frac{1}{2^{n-1}}]\right\}=(-\infty,-\frac{1}{2^n}],$$
$$\left\{x:f(x)\in(-\frac{1}{2^{n-1}},\frac{1}{2^{n-1}})\right\}=(-\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^n}),$$
$$\left\{x:f(x)\in(\frac{1}{2^{n-1}},+\infty)\right\}=(\frac{1}{2^n},+\infty);$$

则

$$f^{(n+1)}(x)=\begin{cases}-2, & x\in(-\infty,-\frac{1}{2^n}],\\ 2^{n+1}x, & x\in(-\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^n}),\\ 2, & x\in[\frac{1}{2^n},+\infty);\end{cases}$$

4 习题1.22

不妨设$-a\le x_1<x_2\le 0$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=f(-x_1)-f(-x_2)\ge 0.$$

其中第一个等式利用f是奇函数，第二个不等式利用f在$[0,a]$上递增。

偶函数情形是类似的。

5 习题1.25

证明$\sin(x^2+x)$不是周期函数。

Proof. 反证法。假设$\sin(x^2+x)$是周期函数，且不妨设周期为$T>0$,则

$$\sin(x^2+x)=\sin((x+T)^2+(x+T)).$$

令$x=0$,得到

$$\sin(0)=\sin(T^2+T).$$

则$T^2+T=k_1\pi$,其中$k_1\in\mathbb{Z}$.

令$x=-1$,得到

$$\sin(0)=\sin((T-1)^2+T-1)=\sin(T^2-T).$$

则$T^2-T=k_2\pi$,其中$k_2\in\mathbb{Z}$.

整理得到,

$$T=\frac{k_3\pi}{2},$$

其中$k_3=k_1-k_2\in\mathbb{Z}$.

又由$T^2+T=k_1\pi$,代入得到

$$\frac{k_3^2\pi^2}{4}+\frac{k_3\pi}{2}=k_1\pi\Longleftrightarrow\frac{k_3^2\pi}{4}+\frac{k_3}{2}=k_1.$$

即得到

$$\pi\in\mathbb{Q}.$$

这与π是无理数矛盾。 □

6 习题1.26

(1)设$x_1,\,x_2>0$,则

$$\begin{aligned}f(x_1+x_2)=&\frac{x_1+x_2}{x_1+x_2}f(x_1+x_2)\\=&x_1\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}+x_2\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\\(\text{单调性})\leq&x_1\frac{f(x_1)}{x_1}+x_2\frac{f(x_2)}{x_2}\\=&f(x_1)+f(x_2).\end{aligned}$$

(2)证明是类似的。

7 习题1.28

Proof. 唯一性：设p_1是$f(x)$的不动点，则p_1也是$f(f(x))$的不动点。由$f(f(x))$只有一个不动点，得到$f(x)$至多有一个不动点。

存在性：已知p是$f(f(x))$唯一的不动点。另一方面，直接验证

$$f(f(f(p)))=f(p),$$

表明$f(p)$也是$f(f(x))$的不动点，因此由唯一性，得到$f(p)=p$,即p是$f(x)$的不动点。 □

8 习题1.30

(1)$\forall l > 0$, $\exists x' \in \mathbb{R}$,使得$f(x') \neq f(x'+l)$;

(2)$\forall M > 0$, $\exists x' \in (a,b)$,使得有$f(x') < -M$.