高等数学A第三次作业习题答案

课程助教组

2020.10

习题2.3

(3). 对$\forall\epsilon>0$, 取$N=\left[\frac{1}{4\epsilon^2}\right]+1$, 当$n>N$时,

$$0<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\epsilon.$$

(4). 对$\forall\epsilon>0$, 取$N=\left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right]+1$, 当$n>N$时,

$$\left|\frac{1-2n^2}{3n^2+1}+\frac{2}{3}\right|=\frac{5}{9n^2+3}<\frac{1}{n^2}<\epsilon.$$

(5). 由于$|q|<1$, 不妨设$\frac{1}{|q|}=1+h$, $h>0$, 则有

$$\frac{1}{|q|^n}=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots>\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}h^4.$$

注意$n>7$时, $(n-3)>\frac{n}{2}$, 故对$\forall\epsilon>0$, 取$N=\max\{7,\left[\frac{192}{\epsilon h^4}\right]+1\}$, 当$n>N$时,

$$\left|n^3q^n\right|<\frac{24n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)h^4}<\frac{192}{nh^4}<\epsilon.$$

(6). 注意$n>7$时, $(n-3)>\frac{n}{2}$, 故对$\forall\epsilon>0$, 取$N=\max\{7,\left[\frac{8}{\epsilon}\right]+1\}$, 当$n>N$时,

$$0<\frac{n^3}{n!}<\frac{n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)}<\frac{8}{n}<\epsilon.$$

习题2.5

首先定义$b_n=a_n-a$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$. 由极限定义, 对$\forall\epsilon>0$, $\exists N_1>0$, 当$n>N_1$时, $|b_n|<\frac{\epsilon}{2}$. 另一方面, 设$M=\max\{|b_1|,...,|b_{N_1}|\}$, 则由条件, $\exists N_2>0$, 当$n>N_2$时, $\frac{p_n}{p_1+\cdots+p_n}<\frac{\epsilon}{2M}$, 故当$n>N_1+N_2$时,

$$\begin{aligned}\left|\frac{p_1a_n+\cdots+p_na_1}{p_1+\cdots+p_n}-a\right| &= \left|\frac{p_1b_n+\cdots+p_nb_1}{p_1+\cdots+p_n}\right|\le\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i}\left(\left|\sum_{i=N_1+1}^{n}p_{n+1-i}b_i\right|+\left|\sum_{i=1}^{N_1}p_{n+1-i}b_i\right|\right)\\ &\le \frac{\sum\limits_{i=N_1+1}^{n}p_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i}\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2M}M<\epsilon.\end{aligned}$$

□

习题2.7

(1)必要性. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 故对$\forall \epsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当$n > N$时, $|x_n - a| < \epsilon$. 由于$2n+1 > 2n > n$, 因此当$n > N$时, 也有$|x_{2n} - a| < \epsilon$, $|x_{2n+1} - a| < \epsilon$. 即已证明子列收敛.
(2)充分性. 对$\forall \epsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当$n > N$时, $|x_{2n} - a| < \epsilon$, $|x_{2n+1} - a| < \epsilon$, 则取$M = 2N + 1$, 当$n > M$时, $|x_n - a| < \epsilon$.
(3)不能保证. □

习题2.9

假设$a_n = \cos n$存在极限a, 设$b_n = \sin n$, 则由下述等式, 知道b_n也存在极限, 设为b:

$$a = \lim_{n\to\infty} \cos(n+1) = \lim_{n\to\infty} (\cos 1 \cos n - \sin 1 \sin n) = a\cos 1 - b \sin 1.$$

同理, 有

$$a = \lim_{n\to\infty} \cos(n-1) = \lim_{n\to\infty} (\cos 1 \cos n + \sin 1 \sin n) = a\cos 1 + b \sin 1.$$

这说明$a = 0$, $b = 0$, 与$a^2 + b^2 = 1$矛盾. □

习题2.10

(3). 写出通项后求和, 得

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

(4). 设$b_n = 1 + a + \cdots + a^{n-1}$, 当$a = 1$时, $b_n = n$, 当$a \neq 1$时, $b_n = \frac{1-a^n}{1-a}$, 故直接计算得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{b_n} = \begin{cases} 0, & 0 < a \leq 1, \\ a - 1, & a > 1. \end{cases}$$

(9). 由几何-调和平均不等式, $0 < a < 1$时,

$$1 > \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot 1 \cdots 1} \geq \frac{n}{1 + 1 + \cdots + 1 + \frac{1}{a}} = \frac{n}{n - 1 + \frac{1}{a}}.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
(10). 类似习题2.3(5), 令$a = 1 + h$, $h > 0$, 则$a^n = (1+h)^n > C_n^{k+1} h^{k+1}$, 因此

$$0 < \frac{n^k}{a^n} < 2^{k+1}(k+1)! \frac{n^k}{h^{k+1} n^{k+1}}, \qquad n > k.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$.

习题2.12

(1). 记$a_n = \sqrt[n]{1 + x^n}$. 根号内要求$1 + x^n \geq 0$, $\forall n$, 故$x \geq -1$. 当$x = -1$时, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0 \neq \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$, 故极限不存在. 当$x > 1$时, $x < \sqrt[n]{1 + x^n} < \sqrt[n]{2x^n}$, 故极限是$x$. 当$-1 < x < 1$时, 由于$x^n$极限是0, 一定存在$N > 0$, $n > N$时, 有$|x^n| < \frac{1}{2}$, 故 $\sqrt[n]{\frac{1}{2}} < \sqrt[n]{1 + x^n} < \sqrt[n]{2}$, 极限是1. 因此$F(x)$定义域为$(-1, +\infty)$, 表达式为

$$F(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x \leq 1, \\ x, & x > 1. \end{cases}$$

(2). 首先$1+x^n+\frac{x^{2n}}{2^n}\geq 0$, 这要求$x\leq -2$或者$x\geq -1$. 当$x=-1,-2$时, 极限不存在. 因此$G(x)$定义域为$(-\infty,-2)\cap(-1,+\infty)$. 类似上一题, 表达式为

$$G(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, & x<-2 \text{ 或 } x>2,\\ 1, & -1<x\leq 1,\\ x, & 1<x\leq 2.\end{cases}$$

习题2.13

由$x_n=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$, 可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. 类似可知$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1$. 此外由夹逼定理, $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=1$:

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=y_n,$$

习题2.14

(1). $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 理由是

$$0<x_n^2=\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\right)\left(\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\right)\cdots\left(\frac{(2n-3)\cdot(2n-1)}{(2n-2)\cdot(2n-2)}\right)\left(\frac{2n-1}{(2n)\cdot(2n)}\right)<\frac{2n-1}{4n^2}.$$

(2). 由如下的不等式和夹逼定理知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$:

$$\frac{2n+1}{n+1}=\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{n+1}\leq\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}\leq\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{n}=\frac{2n+1}{n}.$$

(3). 注意到$n>3$时, $1<\ln n<n$, 以及$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 故由夹逼定理知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$:

$$\sqrt[n]{n}<x_n<\sqrt[n]{n^2}=(\sqrt[n]{n})^2.$$

习题2.15

(1). 反证法. 若$\{x_n+y_n\}$收敛, $\{x_n\}$收敛, 则由极限的四则运算, $\{y_n\}$收敛, 矛盾. 故$\{x_n+y_n\}$发散.
(2). 不一定. 例如$x_n=1/n$收敛到0, $y_n=n$发散, 但$x_ny_n=1$收敛.
(3). 不一定. 例如$x_n=(-1)^n, y_n=(-1)^{n+1}$均发散, 但$x_n+y_n=0,\ x_ny_n=-1$均收敛.
(4). 不一定. 例如$x_n=n, y_n=\frac{1}{n^2}$.

习题2.16

首先注意到当$0<x_n<\frac{1}{A}$时, $x_{n+1}=x_n(2-Ax_n)>0$以及

$$x_{n+1}-\frac{1}{A}=x_n(2-Ax_n)-\frac{1}{A}=-A(x_n-\frac{1}{A})^2<0.$$

故$0<x_{n+1}<\frac{1}{A}$. 因此由初值$0<x_1<\frac{1}{A}$, 可递归推得对$\forall n,\ 0<x_n<\frac{1}{A}$. 接着注意到

$$x_{n+1}-x_n=x_n(1-Ax_n)>0.$$

故$\{x_n\}$单调递增, 有上界, 因此存在极限. 设极限为a, 在递推式两边同取极限, 得到

$$a=a(2-Aa)\qquad\Rightarrow\qquad a=0 \text{ 或 } \frac{1}{A}.$$

由于x_n递增, 知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{A}$. □