高等数学A第一次作业答案

课程助教组

2020.10

1 习题2.18.2

Proof. 本题答案：2。

我们用序列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$表示序列

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots,$$

那么可以写出序列的通项公式

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}. \tag{1}$$

由于序列是正序列，我们可以通过数学归纳法证明序列是单调递增的，并且

$$\sqrt{2} \le a_n < 2.$$

根据单调收敛准则，序列必然存在极限。不妨设极限$\lim_{n\to\infty} a_n = A$。

我们再在通项公式(1)两侧对n取极限得到

$$A = \sqrt{2+A},$$

因此$A = 2$。 □

2 习题2.19

Proof. 根据平均值不等式，一个显然的事实是

$$b_n \le a_n.$$

想要利用单调收敛准则，便需要证明序列单调。首先

$$a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \le 0,$$

此外

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \sqrt{\frac{a_n}{b_n}} > 1.$$

所以a_n单调递减，b_n单调递增，满足

$$a_0 > a_1 > \cdots > a_n > b_n > \cdots > b_1 > b_0,$$

因此两个序列均单调收敛，有极限。

下面讨论他们极限相等的问题。设$a_n \to x$和$b_n \to y$，考虑递推式

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},$$

在递推式里对n取极限得到

$$x = \frac{x+y}{2},$$

因此

$$x = y.$$

□

3 习题2.20.2

Proof. 本题答案：1。

根据特殊极限性质我们有

$$1 < \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < \mathrm{e}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

进一步

$$1 < \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n} = \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{\mathrm{e}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

由夹逼原理知本题极限为1。 □

4 习题2.21

Proof. Stolz定理的证明是比较长的，我们证明A是正实数的情况，其余情况同理。（我们指出这一定理对A是无穷的情况也成立，方法也是一致的。）

根据$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A$的定义，对于一切$0 < \varepsilon < \frac{A}{2}$均存在一个$N_0$使得

$$A - \varepsilon < \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} < A + \varepsilon, \quad \forall n > N_0.$$

由于b_n单调递增，可以得到

$$(A-\varepsilon)(b_n-b_{n-1})<a_n-a_{n-1}<(A+\varepsilon)(b_n-b_{n-1}),\quad \forall n>N_0.$$

我们任意取一个$N>N_0$，并在上式取$n=N_0+1,N_0+2,\cdots,n$得到

$$(A-\varepsilon)(b_N-b_{N_0})<a_N-a_{N_0}<(A+\varepsilon)(b_N-b_{N_0}),\quad \forall N>N_0.$$

当N足够大b_N是正数，此时在不等式同除b_N得到

$$(A-\varepsilon)\left(1-\frac{b_{N_0}}{b_N}\right)<\left(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{N_0}}{b_N}\right)<(A+\varepsilon)\left(1-\frac{b_{N_0}}{b_N}\right),$$

进一步

$$(A-\varepsilon)\left(1-\frac{b_{N_0}}{b_N}\right)+\frac{a_{N_0}}{b_N}<\frac{a_N}{b_N}<(A+\varepsilon)\left(1-\frac{b_{N_0}}{b_N}\right)+\frac{a_{N_0}}{b_N}. \tag{3}$$

对于固定N_0，N具有任意性，取N趋于∞，那么$\frac{b_{N_0}}{b_N}\to 0$且$\frac{a_{N_0}}{b_N}\to 0$，此时又可以取N足够大使得

$$-\varepsilon<\frac{a_{N_0}}{b_N},\frac{b_{N_0}}{b_N}<\varepsilon,$$

此时根据$A-\varepsilon>0$，不等式(3)可以进一步放缩

$$(A-\varepsilon)(1-\varepsilon)-\varepsilon<\frac{a_N}{b_N}<(A+\varepsilon)(1+\varepsilon)+\varepsilon. \tag{4}$$

综上，对任意小的ε（以及与ε对应的N_0），都可以找到足够大的N_1，对于一切$N>N_1$使得不等式(4)成立，因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A.$$

□

注解 1. 观察到*Stolz*定理与洛必达法则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

非常类似。由于*Stolz*定理讨论的是序列极限，洛必达讨论的连续函数的极限，因此在*Stolz*定理中，我们将洛必达法则涉及的连续情况的导数改为了相邻两项之差（即差商）。

注解 2. *Stolz*定理处理的是$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$这一极限。如果$a_n$极限是有限数，$b_n$是无穷，那么显然$\frac{a_n}{b_n}$极限是*0*，也无需*Stolz*定理。如果$a_n$和$b_n$极限均为无穷，极限$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$是一个不定式，此时正是*Stolz*定理用武之地。

注解 3. 我们指出，在*Stolz*定理的叙述里，我们并没有直接使用等式$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$，这是因为必须$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$存在时（可以是广义存在），两个极限相等。如差商极限不存在，此时并不意味着原极限一定不存在。

注解 4. 我们指出，在*Stolz*定理证明里，我们不可以通过直接对不等式*(3)*使用夹逼原理的方式证明$\frac{a_N}{b_N}$收敛，因为不等式*(3)*的左右两侧极限为$A\pm\varepsilon$，并不相同。

5 习题2.24

Proof. 对于某个集合A，设A存在至少一个下界a，我们下面说明A存在下确界。

我们可以取一个实数b不是A的下界，因此$a < b$，此时我们在区间$[a, b]$讨论闭区间套定理。

考虑$\frac{a+b}{2}$，如果$\frac{a+b}{2}$不是集合A的一个下界，那么下一个区间取$\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$；如果$\frac{a+b}{2}$是集合$A$的一个下界那么下一个区间取$\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$；得到的区间记为$[a_1, b_1]$，它依然满足左端点$a_1$是下界，右端点$b_1$不是下界。以此类推，我们可以划分出一系列$[a_n, b_n]_{n\in\mathbb{N}}$，满足$a_n$是下界而$b_n$不是下界。根据闭区间套定理，我们有

$$\{c\} = \cup_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n],$$

并且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

接下来我们将说明，得到的点c即集合A的下确界，我们用下确界的两条定义分别判断：首先c是一个下界，若不然，则存在一个$d \in A$满足$d < c$，根据$\lim_{n\to\infty} a_n = c$，知存在某个$a_K > d$，这与$a_K$是下界矛盾。另一方面，对于任意$\varepsilon > 0$，$\varepsilon + c$都不是$A$的下界。根据$\lim_{n\to\infty} b_n = c$，存在一个$b_L < \varepsilon + c$，考虑到$b_L$不是下界，故$\varepsilon + c$都不是$A$的下界。

综上所述，我们根据区间套定理，构造了一个c是集合A的下确界。 □

6 习题2.25

Proof. 设A是一个有界无穷集合，我们将证明其有聚点。我们使用反证法，设集合A不存在聚点。

对于一个有界集合A，其必然存在下确界a_0，如果a_0不是聚点，那么必然有$a_0 \in A$（根据下确界的定义）。接下来我们考虑$A/\{a_0\}$，得到一个新的有界无穷集，它依然有一个下确界a_1，如果a_1不是聚点那么必有$a_1 \in A/\{a_0\}$。

以此类推，我们得到序列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，根据定义，序列$\{a_n\}$必然是严格单调递增的，且由于$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是有界集合A的子集，所以它必然存在上确界a^*，即

$$a^* = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

再根据序列$\{a_n\}$严格单调递增，极限a^*必然不在序列序列$\{a_n\}$里，因此a^*是序列$\{a_n\}$一个聚点，进一步是A一个聚点。 □

7 习题2.27.3

Proof. 本题答案：收敛。

用柯西收敛准则证明。对于序列

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k^2},$$

那么对于一切$n, p \in \mathbb{N}^*$我们有

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n} \frac{\sin kx}{k^2} \right|.$$

再利用三角不等式进行放缩

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \sum_{k=n+1}^{n} \left| \frac{\sin kx}{k^2} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n} \left| \frac{1}{k^2} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n} \left| \frac{1}{k(k+1)} \right| < \frac{1}{n+1}.$$

因此对任意ε，我们取$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$，此时对一切$n, p \in \mathbb{N}^*$且$n > N$有

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

□

8 习题2.29

Proof. 根据波-魏定理，有界序列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$存在一个收敛子列$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$，设此子列以$A$为极限。

由于有界序列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$是发散的，因此$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$不以$A$为极限。根据发散的定义，我们得知，存在一个确定的$\varepsilon > 0$，使得对一切$N$均存在$n > N$使得$|a_n - A| > \varepsilon$。

根据此定义，取$N = 1$，那么存在一个$m_1 > 1$使得$|a_{m_1} - A| > \varepsilon$。再在定义中取$N = m_1$，存在一个$m_2 > m_1$使得$|a_{m_2} - A| > \varepsilon$。以此类推，我们可以得到序列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$的一个新子列序列$\{a_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$，这个子列也是有界的，所以也存在一个子列$\{a_{m_{k_l}}\}_{l\in\mathbb{N}^*}$收敛。

根据序列$\{a_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$的选取方法，我们知道收敛列$\{a_{m_{k_l}}\}_{l\in\mathbb{N}^*}$的极限不是$A$。$\{a_{m_{k_l}}\}_{l\in\mathbb{N}^*}$是序列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$子列的子列，也是序列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$本身的子列，因此找到了序列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$两个收敛于不同点的子列。 □

9 习题2.30

Proof. 考虑x_n两个子列：

$$x_{8k} = (1 + \frac{1}{8k})^{8k} \to e$$

和

$$x_{8k+1} = -(1 + \frac{1}{8k+1})^{8k+1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \to -e + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

由于序列有两个收敛到不同数的子列，所以序列发散。 □