高等数学A第五次作业习题答案

课程助教组

2020.11

1 习题2.31.(3)

上极限为1，下极限为0.

2 习题2.32.(2)

Proof.

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}\{x_k y_k\}.$$

由$x_k \geq 0$, $y_k \geq 0$, 可得

$$\inf_{k\geq n}\{x_k\}\sup_{k\geq n}\{y_k\} \leq \sup_{k\geq n}\{x_k y_k\} \leq \sup_{k\geq n}\{x_k\}\sup_{k\geq n}\{y_k\}.$$

由极限四则运算（先验证极限的存在性），得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}\{x_k y_k\} \leq \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n}\{x_k\}\sup_{k\geq n}\{y_k\}\right) &= \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}\{x_k\}\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}\{y_k\}\\ &=\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n\overline{\lim}_{n\to\infty}y_n.\end{aligned}$$

类似地，可得

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n\overline{\lim}_{n\to\infty}y_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n y_n).$$

特别地，由$\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty}x_n$,得到所证结论。 □

3 习题2.35

Proof. 反证法。若存在$\xi \in (l, L)$,使得数列$\{x_n\}$不存在子列收敛到ξ,则成立:$\exists \varepsilon_0 > 0, \exists N_0 \geq 1$, $\forall n \geq N_0$:

$$|x_n - \xi| > \varepsilon_0.$$

另一方面，由

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0.$$

取$\varepsilon = \varepsilon_0$,则存在$N_1 \geq 0$,且$\forall n \geq N_1$:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

因此，$\forall n \geq N_2 = \max\{N_0, N_1\}$:

$$|x_n - \xi| > \varepsilon_0, \quad |x_{n+1} - x_n| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad |x_{n+1} - \xi| > \varepsilon_0.$$

不妨设$x_{N_2} - \xi > \varepsilon_0$, 则可得$x_{N_2+1} - \xi > \varepsilon_0$.特别地，依次得到$\forall k$: $x_{N_2+k} - \xi > \varepsilon_0$. 但这与$\{x_n\}$的下极限为$l$矛盾。 □

4 习题2.36

Proof. “$\Longrightarrow$”（必要性）

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n\to\infty} x_{n+1} =& \overline{\lim}_{n\to\infty}(y_n + qx_n) \\ \text{（由}\{y_n\}\text{极限存在）} =& \lim_n y_n + q\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \end{aligned}$$

特别地，得到$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim_{n\to\infty} y_n}{1-q}$. 类似地，下极限也是如此，即上下极限相等，得到$\{x_n\}$的收敛性。

“$\Longleftarrow$”（充分性）

由$y_n = x_{n+1} - qx_n$,可得$\{y_n\}$收敛。 □

5 习题3.3.(1)

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当$x \in (x_0 - \delta, x_0)$时，有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

6 习题3.4.(1)

$\exists M > 0$, $\forall X > 0$, 存在$x' > X$, 使得有$f(x') < M$.

7 习题3.5.(2)

不妨假设$f(x) \geq 0$.（负值情形的根式运算需补充定义）

当$A = 0$时，$\forall \varepsilon > 0$, 取$\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon^3$,由$\lim_{x\to a} f(x) = A$,则存在$\delta > 0$, 使得当$|x - a| < \delta$时:

$$|f(x)| \leq \varepsilon^3.$$

等价地$|f(x)|^{\frac{1}{3}} \leq \varepsilon$,即

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{\frac{1}{3}} = 0.$$

当$A > 0$时，可得在$(a - \delta_0, a + \delta_0)$上成立：$f(x) > A/2$.因此

$$(f(x)^{\frac{1}{3}} - A^{\frac{1}{3}}) = \frac{f(x) - A}{f(x)^{\frac{2}{3}} + f(x)^{\frac{1}{3}}A^{\frac{1}{3}} + A^{\frac{2}{3}}}.$$

再由控制关系，得到所需结论。

8 习题3.6.(8)

Proof. 注意到

$$\begin{aligned}\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} =& \frac{x + \sqrt{x + \sqrt{x}} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \\ =& \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}}\end{aligned}$$

当$x \to \infty$时，极限为$\frac{1}{2}$. □

9 习题3.7.(2)

Proof. 当$x \to 2-$时，可见$[x]^2 \to 1$.因此本题的极限为$+\infty$. □

10 习题3.8.(3)

$$\frac{2\sin x - \sin 2x}{x^3} = \frac{2\sin x(1 - \cos x)}{x^3} = \frac{4\sin x \sin^2(x/2)}{x^3}$$

当$x \to 0$时，极限为1.

11 习题3.8.(6)

$$(1-t)\tan(\frac{\pi}{2}t)=(1-t)\frac{\sin(\frac{\pi}{2}t)}{\cos(\frac{\pi}{2}t)}.$$

令$x=1-t$再求极限，得到结果为$\frac{2}{\pi}$.

12 习题3.8.(10)

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\sin(\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}})=\sin(\pi n(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1)).$$

注意到

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1=\frac{1}{n^2(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1)}.$$

再取极限，得到结果为0.

13 习题3.9.(2)

$$(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\left[(1-2x)^{\frac{1}{-2x}}\right]^{-2}\to e^{-2}.$$

14 习题3.9.(6)

$$\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=(1+\sin\frac{1}{x}-2\sin^2\frac{1}{2x})^x$$

$$\begin{aligned}\ln\left[(1+\sin\frac{1}{x}-2\sin^2\frac{1}{2x})^x\right]=&x\ln(1+\sin\frac{1}{x}-2\sin^2\frac{1}{2x})\\=&x\ln(1+\sin\frac{1}{x})+x\ln(1-\frac{2\sin^2\frac{1}{2x}}{1+\sin\frac{1}{x}})\end{aligned}$$

第一项趋向于1，第二项趋向于0.可得原式极限为e.

15 习题3.13

Proof. 反证法。若$f(x) \neq 0$, 则存在x_0,使得$f(x_0) = A \neq 0$.由f是周期函数，不妨设周期为T,则$\forall k \in \mathbb{N}$:$f(x_0 + kT) = A$.这与$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$矛盾。 □

16 习题3.15

Proof. 设

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = A,$$

由极限四则运算，得到

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(\alpha x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{f(\alpha x)}{x} - \frac{f(x)}{x} \right) + \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = A.$$

若$\alpha = 0$,则可得$f(0) = 0$,进而$A = 0$.

当$\alpha \neq 0$时，

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(\alpha x)}{x} = \alpha \lim_{x\to 0} \frac{f(\alpha x)}{\alpha x} = \alpha A.$$

特别地，$A = 0$.

□