高等数学A第六次作业习题答案

课程助教组

2020.11

3.17

(3). 易看出$f(x)$在$|x|\neq 1$时连续. $f(1+0)=\ln 2,\ f(1-0)=1,\ f(-1+0)=-1,\ f(-1-0)$不存在. 因此$x=-1$是第二类间断点, $x=1$是跳跃间断点.
(4). 易看出$f(x)$在$x\neq 0$时连续. 设$x_n=\frac{1}{2n\pi},\ y_n=\frac{2}{4n\pi+\pi},\ n\geq 1$, 则$f(x_n)=1, f(y_n)=0$, 因此$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$不存在, $x=0$是第二类间断点.

3.19

只需要让$f(x)$在$x=0$连续, 即左右极限相等, $e^0=\alpha+0$, 推出$\alpha=1$.

3.21

类似Dirichlet函数:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ -1, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.\end{cases}$$

3.22

类似Riemann函数:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x=x_n,\\ 0, & x\in\mathbb{R}\backslash\{x_n\}.\end{cases}$$

3.25

(1). 由题意$a_{n+1}=f(a_n)\leq a_n$, 故a_n单调递减, 又由于$a_1>0,\ f(x)\leq 0\ (x\geq 0)$, a_n有下界. 由单调收敛定理, a_n存在极限.
(2). 在$a_{n+1}=f(a_n)$两端取极限, 则由f连续性,

$$l=\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)=f(l).$$

(3). 由条件$0\leq f(x)<x(x>0)$, 取任意趋向于0的$\{x_n\}$, 由夹逼原理有$f(x_n)$极限为0, 故由连续性和归结原理, 只能有$f(0)=0$, 所以该条件包含原条件, 上述(1)(2)结论成立. 由(2), $f(l)=l$, 若$l>0$, 则有$l=f(l)<l$ 矛盾, 故只能有$l=0$.

3.26

当$x\to 0$ 时, $\frac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{p}(a_i^x-1)\to 0,\ \frac{\sum\limits_{i=1}^{p}(a_i^x-1)}{px}\to\frac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{p}\ln a_i$, 故

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}a_i^x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}(a_i^x-1)\right)^{\frac{1}{\frac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{p}(a_i^x-1)}\frac{\sum\limits_{i=1}^{p}(a_i^x-1)}{px}}=e^{\frac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{p}\ln a_i}=(a_1\cdots a_p)^{\frac{1}{p}}.$$

3.30

证明. 若$f(a)=a$或$f(b)=b$, a或b就是$f(x)$的不动点. 否则, 由于$f([a,b])\subset[a,b]$, 只能有$f(a)-a>0$, $f(b)-b<0$, 令$h(x)=f(x)-x$, 则$h(x)$在$[a,b]$连续, 由零点存在定理, 存在$c\in(a,b)$使得$h(c)=0$, 即$f(c)=c$. □

3.32

证明. 若$f(x)$不是严格单调的, 则存在$x_1,x_2,x_3\in[a,b]$, $x_1<x_2<x_3$, 使得$(f(x_1)-f(x_2))(f(x_2)-f(x_3))\le 0$. 由于$x_1\neq x_2$时, $f(x_1)\neq f(x_2)$, 故$(f(x_1)-f(x_2))(f(x_2)-f(x_3))<0$. 故可以找一个$\eta\in\mathbb{R}$, 使其既处于$f(x_1)$和$f(x_2)$为端点的开区间之间, 又处于$f(x_2)$和$f(x_3)$为端点的开区间之间. 由连续函数介值定理, 存在$y_1,y_2$, 使得$x_1<y_1<x_2<y_2<x_3$且$f(y_1)=f(y_2)=\eta$. 这与条件$y_1\neq y_2$时, $f(y_1)\neq f(y_2)$矛盾. 故$f(x)$在$[a,b]$上严格单调. □

3.33

(1). 对任意$x>y$, 有$kx-f(x)-(ky-f(y))\ge k(x-y)-|f(x)-f(y)|\ge 0$. 故$kx-f(x)$单调上升.
(2). 首先由Cauchy收敛准则, 容易看出$f(x)$在$\mathbb{R}$上连续. 令$h(x)=x-f(x)$, 则$h(x)$连续, 且由$0<k<1$和(1)结论, $h(x)=(1-k)x+kx-f(x)$也是单调上升的, 当$x>0$时, $h(x)=(1-k)x+kx-f(x)\ge(1-k)x-f(0)$, $h(+\infty)=+\infty$; 当$x<0$时, $h(x)\le(1-k)x-f(0)$, $h(-\infty)=-\infty$. 故由连续函数介值定理, 存在$c\in\mathbb{R}$使得$h(c)=0$, 即$f(c)=c$.

3.34

证明. 由于$x\to\pm\infty$时$f(x)\to+\infty$, 故对$f(0)$, 必存在$X>0$, 当$|x|>X$时有$f(x)>f(0)$. 由于$f(x)\in C[-X,X]$, 故$f(x)$在$[-X,X]$上存在最小值, 不妨设最小值为m. 则$m\le f(0)$, 从而m也是$\mathbb{R}$上的最小值. □

3.36

证明. 根据$f(x)\in C[a,b]$, 以及$||f(x)|-|f(y)||\le|f(x)-f(y)|$, 由Cauchy收敛准则容易看出$|f(x)|\in C[a,b]$. 故$|f(x)|$在$[a,b]$上存在最小值, 不妨设$|f(x_0)|=m\ge 0$是最小值. 若$m>0$, 则由条件必存在$y\in[a,b]$使得$|f(y)|\le\frac{1}{2}|f(x_0)|=\frac{1}{2}m<m$, 这与$m$是最小值矛盾. 因此$m=0$, 证毕. □