高等数学A第七次作业答案

课程助教组

2020.11

1 习题3.38

Proof. 由例题3.3.6，极限$\lim_{x\to 0+0}\sin\frac{1}{x}$不存在，因此函数$\sin\frac{1}{x}$在$(0,1)$不一致连续。

再考虑在$[1,+\infty)$的一致连续性，此结论可以由习题3.40的结论直接得到，因此我们直接证明3.40这一更一般的结论：由$\lim_{x\to+\infty}f(x)$存在，根据柯西收敛准则，对于任意给定的$\varepsilon>0$，都存在$X>a$使得

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leq\varepsilon,\quad \forall x_1,x_2\geq X. \tag{1}$$

此时注意到$f(x)$在区间$[a,X+1]$是连续的，根据康托尔定理，其在该区间一致连续，即根据定义，对之前给定的$\varepsilon>0$，存在一个$\delta_0>0$使得

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leq\varepsilon,\quad \forall|x_1-x_2|<\delta_0, x_1,x_2\in[a,X+1]. \tag{2}$$

现在取$\delta=\min\{\frac{1}{2},\delta_0\}$，由于$\delta<\frac{1}{2}$，那么对于$|x_1-x_2|<\delta$，它们必然同属于区间$[a,X+1]$或$[X,+\infty)$，因此分别由式(1)和(2)可得

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leq\varepsilon,\quad \forall|x_1-x_2|<\delta, x_1,x_2\in[a,+\infty). \tag{3}$$

再根据ε的任意性，结合一致连续的定义命题得证。 □

2 习题3.41

Proof. 我们依然采用“分段”的方法：根据$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$对于任意给定的$\varepsilon>0$，都存在$X>a$使得

$$|f(x)-g(x)|\leq\frac{\varepsilon}{3},\quad \forall x\geq X. \tag{4}$$

接着再根据函数$f(x)$在$[X,+\infty)$的连续性，存在$\delta_1>0$使得

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leq\frac{\varepsilon}{3},\quad \forall|x_1-x_2|<\delta_1, x_1,x_2\in[X,+\infty). \tag{5}$$

结合式(4)(5)，对于任意的$|x_1-x_2|<\delta_1$且$x_1,x_2\in[X,+\infty)$我们有

$$|g(x_1)-g(x_2)|\leq|g(x_1)-f(x_1)|+|f(x_1)-f(x_2)|+|f(x_2)-g(x_2)|\leq\varepsilon. \tag{6}$$

另一方面，注意到$g(x)$在区间$[a,X+1]$是连续的，根据康托尔定理，其在该区间一致连续，即根据定义，对之前给定的$\varepsilon>0$，存在一个$\delta_2>0$使得

$$|g(x_1)-g(x_2)|\leq\varepsilon,\quad\forall|x_1-x_2|<\delta_2,x_1,x_2\in[a,X+1]. \tag{7}$$

现在取$\delta=\min\{\frac{1}{2},\delta_1,\delta_2\}$，由于$\delta<\frac{1}{2}$，那么对于$|x_1-x_2|<\delta$，它们必然同属于区间$[a,X+1]$或$[X,+\infty)$，因此分别由式(6)和(7)可得

$$|g(x_1)-g(x_2)|\leq\varepsilon,\quad\forall|x_1-x_2|<\delta,x_1,x_2\in[a,+\infty). \tag{8}$$

再根据ε的任意性，结合一致连续的定义命题得证。 □

3 习题3.43.3

Proof. 本题答案：$\frac{1}{n}x$。

我们考虑如下极限：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}.$$

进行换元替换$t=\sqrt[n]{1+x}-1$得到$x=(1+t)^n-1$，那么

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{(1+t)^n-1}=\lim_{t\to0}\frac{1}{n+C_n^2t+\cdots+t^{n-1}}=\frac{1}{n}.$$

□

4 习题3.46.4

Proof. 本题答案：$\frac{\ln3-\ln2}{\ln4-\ln3}$。

对极限化简

$$\lim_{x\to0}\frac{2^x-3^x}{3^x-4^x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{3}{4}\right)^x\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1}{\left(\frac{3}{4}\right)^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1}{\left(\frac{3}{4}\right)^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\ln\frac{2}{3}\right)x}{\left(\ln\frac{3}{4}\right)x}=\frac{\ln3-\ln2}{\ln4-\ln3}$$

□

5 习题4.2

Proof. 定义

$$\lambda_1=\frac{y_n-x_0}{y_n-x_n},\lambda_2=\frac{x_0-x_n}{y_n-x_n}.$$

那么$\lambda_1+\lambda_2=1$且$\lambda_1,\lambda_2\in(0,1)$。

此时待求极限可以写为

$$\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=\lambda_1\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}+\lambda_2\frac{f(x_0)-f(x_n)}{x_0-x_n},$$

进一步

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}-f'(x_0)\right|\\ \leq\ &|\lambda_1|\left|\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}-f'(x_0)\right|+|\lambda_2|\left|\frac{f(x_0)-f(x_n)}{x_0-x_n}-f'(x_0)\right|\\ \leq\ &\left|\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}-f'(x_0)\right|+\left|\frac{f(x_0)-f(x_n)}{x_0-x_n}-f'(x_0)\right|.\end{aligned}\tag{1}$$

再根据导数的定义，知原极限成立。 □

6 习题4.3

Proof. 由于$|f(x)|\leq|\sin x|$对于一切x成立，因此$f(0)=0$，进一步

$$f'(0)=\lim_{y\to0}\frac{f(y)}{y}.$$

根据题设有

$$\left|\frac{f(y)}{y}\right|\leq\left|\frac{\sin y}{y}\right|,$$

由极限$\lim_{y\to0}\frac{f(y)}{y}$的存在性和极限的保序性得到

$$|f'(0)|\leq\lim_{y\to0}\left|\frac{\sin y}{y}\right|=1.$$

□

7 习题4.5.2

Proof. 在$x_0=0$附近$f(x)=\frac{1}{4}(x-1)(x+1)^2$为多项式，因此可导。

在$x_0=1$附近，两侧导数$f'(1+0)=f'(1-0)=1$，故可导。

在$x_0=-1$附近，两侧导数$f'(-1+0)=0$而$f'(-1-0)=-1$，故不可导。 □

8 习题4.6

Proof. 本题答案：$\frac{f'(0)}{2}$。

对于给定的n，定义系数$\lambda_k(n)=\frac{k}{n^2}\in(0,\frac{1}{n}]$，那么

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(n)=\frac{n+1}{2n}.$$

下面证明极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right)-nf(0)-\frac{n+1}{2n}f'(0)\right]=0. \tag{9}$$

下面对于给定的n考虑极限(9)：

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right)-nf(0)-\frac{n+1}{2n}f'(0)\right|\\
=&\left|\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n^2}\right)-f(0)-\lambda_k(n)f'(0)\right]\right|\\
\le&\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(n)\left|\frac{f\left(\frac{k}{n^2}\right)-f(0)}{\frac{k}{n^2}}-f'(0)\right|\\
\le&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sup_{x\in(0,\frac{1}{n}]}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)\right]\\
=&\sup_{x\in(0,\frac{1}{n}]}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)\right]
\end{aligned}$$

由于$f'(0)$存在，因此

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,\frac{1}{n}]}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)\right]=0.$$

因此极限(9)成立。

接下来，我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}f'(0)-\frac{f'(0)}{2}\right)=0. \tag{10}$$

结合极限(9)和(10)得原题目极限为$\frac{f'(0)}{2}$。 □

注解 1. 本题在周民强著数学分析习题演练也有出现，但是该证明为伪证，因为对于形如$\sum_{k=1}^{n}$式子对n的极限，求和号和极限号是不可以交换的。

9 习题4.7

Proof. 1）本题答案：$\frac{1}{2}$。

在习题4.6取$f(x)=\sin x$，此时$f(0)=0$而$f'(0)=1$，因此本题答案$\frac{f'(0)}{2}=\frac{1}{2}$。

2）本题答案：$\sqrt{e}$。

对极限取对数得到

$$\lim_{n\to\infty}\exp\left[\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right].$$

在指数里考虑函数$f(x)=\ln(1+x)$，此时$f(0)=0$而$f'(0)=1$，那么指数极限$\frac{1}{2}$，原极限$\sqrt{e}$。 □