高等数学A第八次作业习题答案

课程助教组

2020.12

1 习题4.11.(1)

Proof. 切线方程满足

$$\begin{cases} x^3 = px - q, \\ 3x^2 = p. \end{cases}$$

可得

$$q = \frac{p\sqrt{3p}}{3} - \left(\frac{\sqrt{3p}}{3}\right)^3 \quad \text{或} \quad q = -\frac{p\sqrt{3p}}{3} + \left(\frac{\sqrt{3p}}{3}\right)^3.$$

□

2 习题4.14.(7)

直接计算得：$3x^2 \ln x + x^2 - x^{n-1}$.

3 习题4.14.(10)

直接计算得：$-\left(\frac{\cos x}{x^5} + \frac{x^4 \sin x + 4x^3 \cos x}{x^8} \ln \frac{1}{x}\right)$.

4 习题4.16.(4)

直接计算得：$\frac{1}{a^2 - x^2}$.

5 习题4.19.(5)

注意到$x^{(x^x)}=e^{x^x\ln x}$. 直接计算得：$x^{x^x}\left[x^x\left(\ln x+1\right)\ln x+x^{x-1}\right]$.

6 习题4.20.(8)

直接计算得：$\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

7 习题4.26

直接计算得：

$$dr=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad d\theta=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}.$$

8 习题4.27.(2)

直接计算得：$\frac{x+y}{x-y}$.

9 习题4.33.(5)

$\sqrt[5]{245}=\sqrt[5]{243+2}\approx\sqrt[5]{243}+\frac{2}{5}(243)^{-\frac{4}{5}}=3+\frac{6}{1215}=\frac{3651}{1215}$.

10 习题4.35

$f(x)=|x|^3$,直接计算得到$f'(0)=0$,且

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2,\\-3x^2.\end{cases}$$

直接计算得到$f''(0)=0$,且

$$f''(x)=\begin{cases}6x,\\-6x.\end{cases}$$

可见$f'''(0)$不存在。

11 习题4.38

直接计算验证即可。

12 习题4.40

$$\begin{cases} x = 3t, & t \geq 0, \\ x = t, & t < 0. \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} y(x) = 16\left(\frac{x}{3}\right)^4 + 9\left(\frac{x}{3}\right)^3 \sin\frac{x}{3}, & x \geq 0, \\ y(x) = 16x^4 + 9x^3\sin(-x) & x < 0. \end{cases}$$

直接计算，得到$y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$,且当$n \geq 4$时，$y^{(n)}(0)$不存在。

13 习题4.41

(1). Leibniz法则

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \left(x^{n-1}\ln x\right)^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x^{n-1}\right)^{(n-k)} (\ln x)^{(k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(n-1)!}{(k-1)!} (-1)^{k-1} (k-1)! \frac{1}{x} \\ &= \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{k-1} \frac{(n-1)!}{x} \\ &= \frac{(n-1)!}{x} \end{aligned}$$

其中

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k.$$

□

(2). $n=1$，直接验证。归纳法，假设对$n=k$成立，下证$n=k+1$情形。直接计算

$$\begin{aligned} y^{(k+1)}=\left[y^{(k)}\right]'&=\left[(-1)^k\frac{k!c^{k-1}}{(cx+d)^{k+1}}(bc-ad)\right]' \\ &=(-1)^{k+1}\frac{(k+1)!c^k}{(cx+d)^{k+2}}(bc-ad) \end{aligned}$$

□

(3). 归纳法。当$n=1$时，易证。假设$n=k$时，命题成立，则当$n=k+1$时，

$$\begin{aligned} \left\{x^ke^{\frac{1}{x}}\right\}^{(k+1)}&=\left[\left(x^ke^{\frac{1}{x}}\right)'\right]^{(k)} \\ &=\left[kx^{k-1}e^{\frac{1}{x}}-x^{k-2}e^{\frac{1}{x}}\right]^{(k)} \\ &=k\left[x^{k-1}e^{\frac{1}{x}}\right]^{(k)}-\left[\left(x^{k-2}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k-1)}\right]' \\ &=k\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}-\left[\frac{(-1)^{k-1}}{x^k}e^{\frac{1}{x}}\right]' \\ &=k\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}-\left[k\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}+\frac{(-1)^{k-1}}{x^k}e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] \\ &=\frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

□

14 习题4.43

(1).

$$[x+(1-y)]^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k(1-y)^{n-k}$$

对x求导，得到

$$n\left[x+(1-y)\right]^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}C_n^kkx^{k-1}(1-y)^{n-k}.$$

同乘x,再令$y=x$,得到

$$nx=\sum_{k=0}^{n}C_n^kkx^k(1-x)^{n-k}.$$

□

(2). 方法同(1),先对x求2次导。 □

(3).

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\\
=&\sum_{k=0}^{n}\left(k^2+n^2x^2-2knx\right)C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\\
=&\sum_{k=0}^{n}\left(k(k-1)+(1-2nx)k+n^2x^2\right)C_n^kx^k(1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

由(1), (2)结论，代入得到

$$\begin{aligned}
=&n(n-1)x^2+(1-2nx)nx+n^2x^2\\
=&nx(1-x)
\end{aligned}$$

□

15 习题4.44

Proof. 关键是需要证明$f'(0)$的存在性。

由$\lim_{x\to0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=m$,知$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta$, 当$|x|\in(0,\delta)$,成立

$$\left|\frac{f(2x)-f(x)}{x}-m\right|\le\frac{\varepsilon}{2},$$

因此

$$|f(\frac{x}{2^{k-1}})-f(\frac{x}{2^k})-m\frac{x}{2^k}|\le\frac{\varepsilon}{2}\frac{|x|}{2^k}$$

对任意$k\ge1$成立。特别地，

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\frac{x}{2^{k-1}})-f(\frac{x}{2^k})-m\frac{x}{2^k}\right|\le\frac{\varepsilon}{2}|x|,$$

即

$$|f(x)-f(\frac{x}{2^n})-(1-2^{-n})mx|\le\frac{\varepsilon}{2}|x|.$$

由f在$x=0$处连续性，对n取极限，得到

$$|f(x)-f(0)-mx|\le\frac{\varepsilon}{2}|x|<\varepsilon|x|.$$

由导数定义，即得$f'(0)=m$. □