高等数学A第九次作业习题答案

课程助教组

2020.12

5.2

证明. 设$F(x)=(x-a)^n(x-b)^n$, 则$F(a)=F(b)=0$, 由Rolle定理, 存在$\xi_1^1\in(a,b)$, s.t.

$$F'(\xi_1^1)=0.$$

注意到$F^{(k)}(a)=F^{(k)}(b)=0,\ 0\le k\le n-1$, 故若$a<\xi_1^k<\xi_2^k<\cdots<\xi_k^k<b$ 是$F^{(k)}(x)$的零点, 由Rolle定理, 存在$a<\xi_1^{k+1}<\xi_1^k<\xi_2^{k+1}<\xi_2^k<\cdots<\xi_k^k<\xi_{k+1}^{k+1}<b$使得

$$F^{(k+1)}(\xi_i^{k+1})=0,\quad i=1,2,...,k+1.$$

由归纳法原理, $f(x)=F^{(n)}(x)$在(a,b)内有n个互不相同的零点. □

5.4

证明. 令$F(x)=ax^4+bx^3+cx^2-ax-bx-cx$, 则$F(0)=F(1)=0$, 由Rolle中值定理即得. □

5.6

证明. 定义$\tilde{H}_n(x)=n!H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, 则$\tilde{H}_n(x)=(-1)^n\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-\frac{x^2}{2}})$, 于是不难看出

$$\frac{d}{dx}\tilde{H}_n(x)=-\tilde{H}_{n+1}(x).$$

注意到$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\tilde{H}_n(x)=0$, 故若$x_1<x_2<\cdots<x_n$是$\tilde{H}_n(x)$的零点, 由广义Rolle定理, 存在$y_1<x_1<y_2<x_2<\cdots<x_n<y_{n+1}$, 使得$\tilde{H}_n'(y_i)=0,\ i=1,...,n+1$, 但由上述递推式, 这说明$\tilde{H}_{n+1}(y_i)=0$. 注意到$\tilde{H}_n(x)$和$H_n(x)$有相同的零点, 且$H_0(x)=1,\ H_1(x)=x$, 由归纳法, 容易说明$H_n(x)$有n个不同的零点. □

5.7(1)

证明. 设$|f'(x)|<M,\ x\in(a,b)$. 则对$\forall\epsilon>0$, 取$\delta=\frac{\epsilon}{M+1}$, 对$\forall x_1,x_2\in(a,b)$ 且$|x_1-x_2|<\delta$, 由中值定理,

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)||x_1-x_2|<\epsilon,\quad \xi\in(a,b).$$

□

5.9(2)

证明. 令$f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$, 则$x>0$时$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x>0$, 又$f(0)=0$, 故$f(x)>0$. 同理令$g(x)=x-\ln(1+x)$, $g(0)=0$且$x>0$时$g'(x)>0$, 故$g(x)>0$. □

5.10

证明. 令$h(x)=f(x)-g(x)$, 则$h'(x)>0$. 当$x>a$时, $h(x)>h(a)=0$, 即$f(x)>g(x)$. 当$x<a$时, $h(x)<h(a)=0$, 即$f(x)<g(x)$. □

5.13

证明. 由于$f(x)$在a二阶可导, 可以取充分小的h, 使得$f'(x)$在邻域$(a-2|h|,a+2|h|)$内有定义. 记$F(x)=f(x)-f(x-h)$, 则由Lagrange中值定理, 存在$a,a+h$之间的$\xi=a+\theta h$, 使得

$$f(a+h)+f(a-h)-2f(a)=F(a+h)-F(a)=F'(\xi)h,$$

故由二阶导数的定义, 易得所证. □

5.18

证明. 任取一个$\epsilon_0>0$, 对$\forall\delta>0$, 存在$M>0$, 当$x>M$时有$f'(x)>3\frac{\epsilon_0}{\delta}$. 于是只要取$x_1>M$, $x_2=x_1+\frac{1}{2}\delta$, 则$|x_1-x_2|<\delta$, 但

$$|f(x_1)-f(x_2)|=f'(\xi)|x_1-x_2|>\frac{3}{2}\epsilon_0>\epsilon_0.$$

这说明$f(x)$不一致连续. □

5.25

(1). 用2次洛必达法则,

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}=-\lim_{x\to1}\frac{\tan(x-1)}{\cos\frac{\pi x}{2}}\frac{2}{\pi}=-\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{\cos^2(x-1)}}{\sin\frac{\pi x}{2}}\frac{4}{\pi^2}=-\frac{4}{\pi^2}.$$

(7). 先通分再用洛必达法则,

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x+\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2\cos x-x\sin x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{-3\sin x-x\cos x}{2\cos x-x\sin x}=0.$$

(11). 先求对数, 利用等价无穷小和洛必达法则,

$$\lim_{x\to0}(1-\cos x)\ln(1-\cos x)=\lim_{y\to0}\frac{\ln y}{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{1}{y}}{-\frac{1}{y^2}}=0.$$

故原极限为1.
(13). 先求对数, 再用洛必达法则,

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1.$$

故原极限为e^{-1}.
(16). 先求对数, 再用洛必达法则,

$$\lim_{x\to0+0}\frac{\ln(1+x^a)-\ln(1+x^b)}{\ln x}=\lim_{x\to0+0}\frac{\frac{ax^{a-1}}{1+x^a}-\frac{bx^{b-1}}{1+x^b}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0+0}\frac{ax^a}{1+x^a}-\frac{bx^b}{1+x^b}=0.$$

故原极限为1.

5.26

证明. $f(x)$有界, 且$f'(x)$在$x \to +\infty$时极限存在, 故由洛必达法则

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = b.$$

□

5.27

证明. 取$f(x) = \ln(1+x)$, 由中值定理, $f(x) - f(0) = f'(\xi)x$, 其中$\xi = \theta x$, $0 < \theta < 1$. 即

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+\theta x}.$$

反解出θ, 有

$$\lim_{x\to0} \theta = \lim_{x\to0} \frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}} = \lim_{x\to0} \frac{x}{(1+x)\ln(1+x) + x} = \lim_{x\to0} \frac{1}{2 + \ln(1+x)} = \frac{1}{2}.$$

□

5.29

证明. 用洛必达法则,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(f(x) + f'(x))}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} f(x) + f'(x) = k.$$

□