Week 7 Lecture 10

Plan: 1. 序列极限、函数极限关系

2. 极限存在性定理

3. 两个重要极限

4. 函数的连续与间断

※ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A$，则 $\exists \varepsilon_0>0$，对 x_0 的任意邻域，有 $x'\neq x_0$，s.t. $|f(x)-A|>\varepsilon_0$。

即 $\exists \varepsilon_0>0$，$\forall \delta>0$，$\exists x'\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ s.t. $|f(x)-A|>\varepsilon_0$

定理 3.1.7 设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 有定义 $(\delta_0>0)$

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 内任意收敛于 x_0 的序列 $\{x_n\}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

证明：$\Rightarrow$ 易证，练习

$\Leftarrow$ 若不然，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A$

则 $\exists \varepsilon_0>0$，$\forall \delta>0$，有 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$，

s.t. $|f(x)-A|\geq \varepsilon_0$。

分别取 $\delta=\frac{1}{n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$

$\exists x_n\in \mathring{U}(x_0,\frac{1}{n})$，s.t. $|f(x_n)-A|\geq\varepsilon_0$。

则 $x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$ 且 $x_n\in \mathring{U}(x_0,\delta)$

则由条件知 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

这与 $|f(x_n)-A|\geq\varepsilon_0$ 矛盾.

证毕

例 3.1.12 试证 $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ 不存在

取 $x_n=\frac{1}{n\pi}$，则 $x_n\to 0$ $(n\to\infty)$

且 $f(x_n)=0$

又取 $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，则

$x_n\to 0$ $(n\to\infty)$ 且 $f(x_n)=1$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ 不存在.

※ 柯西收敛准则

定理 3.1.9 设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 有定义

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$

s.t. $\forall x',x''\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，有

$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

证明：$\Rightarrow$ 易证，练习

$|f(x')-f(x'')|\leq |f(x')-A|+|f(x'')-A|$

$\Leftarrow$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$，s.t.

$\forall x',x''\in \mathring{U}(x_0,\delta)$，$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$ (*)

选 $\{x_n\}$，$x_n\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$，$x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$

则 $\exists N$，s.t. 当 $n>N$ 时

$0<|x_n-x_0|<\delta$

于是 $\forall m,n>N$，由 (*) 知

$|f(x_n)-f(x_m)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

于是 $\{f(x_n)\}$ 是柯西列，故收敛

记 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

下面证 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

已知 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, $N\in\mathbb{N}$

s.t. $|f(x)-f(x_n)|<\frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$, $\forall n>N$

于是 $|f(x)-A|\le|f(x)-f(x_n)|+|f(x_n)-A|$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$, 对同一$\varepsilon$, $\exists N_1\in\mathbb{N}$

s.t. $|f(x_n)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n>N_1$

则 $n>\max\{N_1,N\}$ 时 $|f(x)-A|<\varepsilon$

即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, s.t. $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$

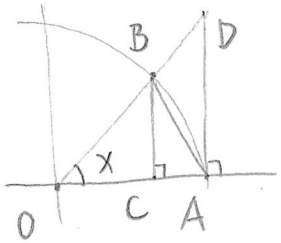
$|f(x)-A|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

注: 可推广到广义极限

※ 两个重要极限

(α) 考虑单位圆上



$x\in(0,\frac{\pi}{2})$

$|BC|=\sin x$ $|AD|=\tan x$

几何上, 易知

$\sin x<x<\tan x$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

从而 $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

由偶函数性质 $\forall x\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$

$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$. (Δ)

也易证 $\forall x\neq0$, 有

$|\sin x|<|x|$

则 $\forall a\in\mathbb{R}$, 有

$|\cos x-\cos a|=|2\sin(\frac{x+a}{2})\sin(\frac{x-a}{2})|$

$\le2|\sin(\frac{x-a}{2})|\le|x-a|$

从而可证 $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$

类似地, $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$

特别地 $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$

则 由(Δ)知 (夹逼收敛)

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

例 3.1.14. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}$

$\xrightarrow{t=\sin x}\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$

$=1\cdot1=1$

(β) 证 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

先考虑 $x\to+\infty$ 时

当 $x>1$ 时

$1+\frac{1}{[x]+1}\le1+\frac{1}{x}\le1+\frac{1}{[x]}$

从而

$(1+\frac{1}{[x]+1})^x\le(1+\frac{1}{x})^x\le(1+\frac{1}{[x]})^x$.

$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}\le(1+\frac{1}{x})^x\le(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}$

则由夹逼收敛

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

再考虑 $x\to-\infty$ 时

令 $y=-x$，则 $y\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)$$

$$=e\cdot 1=e$$

故 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

例 3.1.15 $\lim_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

$$\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{2}{t}\right)^{t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t-2}{t}\right)^{t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{t-2}\right)^{-t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{2}{t-2}\right)^{-t}$$

$s=\frac{t}{2}-1$，$t=2s+2$

$$=\lim_{s\to\infty}\left(1+\frac{1}{s}\right)^{-(2s+2)}$$

$$=\lim_{s\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{s}\right)^{s}\right]^{-2}\left(1+\frac{1}{s}\right)^{-2}$$

$$=e^{-2}\cdot 1=e^{-2}$$

（函数上，下极限，阅读）

函数的连续，间断

Def. 设 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta_0)$ $(\delta_0>0)$ 上定义

若 $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 x_0 连续

否则 $f(x)$ 在 x_0 间断.

注：(1) 三条件 (a) $\lim_{x\to x_0}f(x)$ 存在

(b) $f(x_0)$ 存在 (c) $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

(2) 用 ε-δ 语言

若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时

有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则 $f(x)$ 在 x_0 连续.

Def. 若 $f(x)$ 在 $U^+(x_0,\delta_0)$ 上定义

且 $f(x_0+0)=f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 x_0 右连续

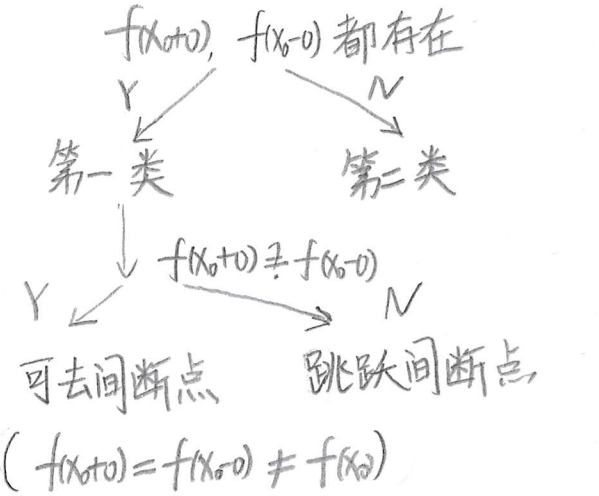
类似可定义左连续

注：$f(x)$ 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 左，右连续

Def. $f(x)\in C(a,b)$ 在 (a,b) 内连续

$f(x)\in C[a,b]$ 在 $[a,b]$ 上连续

间断分类 $f(x)$ 在 x_0 间断



$(f(x_0+0)=f(x_0-0)\neq f(x_0))$