Week 9 Lecture 13

Plan: 1. 导数的定义
2. 四则运算
3. 反函数，复合函数求导

给定 $S(t)$，考虑 $t\in[t_0, t_0+\Delta t]$

记 $\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t_0)$

平均变化率 $v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$

$t=t_0$ 时的瞬时变化率

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$$

注：可以给出不同"解读"

Def. 设 $y=f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内定义 ($\delta>0$)

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，极限值为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$，$\frac{df(x_0)}{dx}$，$\frac{df}{dx}\big|_{x=x_0}$，$y'\big|_{x=x_0}$。

例 4.1.2. 求 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $x=x_0>0$ 的导数

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

则 $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

注：若 $f(x)$ 在 (a,b) 内每点可导，则 $f'(x)$ 也是 (a,b) 内的一个函数，称为 $f(x)$ 的导函数。

回顾：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$ $(a>0, a\neq 1)$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$ $(a>0)$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x} = \mu$.

例 4.1.3 $f(x)=x^\alpha$, $x\neq 0$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x}$$

$$= x^\alpha\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^\alpha-1}{\Delta x}$$

$$= x^{\alpha-1}\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^\alpha-1}{\frac{\Delta x}{x}}$$

由 $\Delta x\to 0$ 时，$t=\frac{\Delta x}{x}\to 0$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} x^{\alpha-1}\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^\alpha-1}{t}$$

$$= \alpha x^{\alpha-1}$$

例 4.1.5 $f(x)=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$

$\forall x\in(0,+\infty)$

$$\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{x}\frac{\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$\to \frac{1}{x\ln a} \quad (\Delta x\to 0)$$

则 $f'(x) = \frac{1}{x\ln a}$. $((\ln x)' = \frac{1}{x})$

类似有：(1) $(a^x)' = a^x\ln a$

$(e^x)' = e^x$

(2) $(\sin x)' = \cos x$

(3) $(\cos x)' = -\sin x$

单侧导数

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

注：(1) $f'(x_0)$存在 $\Leftrightarrow$ $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$存在且相等.

(2) $f(x_0)$存在 $\Rightarrow$ $f(x+\Delta x)\to f(x)$ $(\Delta x\to 0)$

定理 4.1.1 若 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，则它在 x_0 处连续.

注：(1) 连续不一定可导

如 $y=|x|$ 在 0 处

(2) $f(x)$ 在 x_0 左、右可导，则 $f(x)$ 在 x_0 连续（练习）.

例 4.1.8 $S(x)=\begin{cases}\sin(\frac{1}{x}), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

(1) $S(x)$ 在 $x=0$ 处间断（第二类）

(2) $xS(x)$ 在 $x=0$ 处连续，不可导

$$\lim_{x\to 0}x\sin(\tfrac{1}{x})=0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\sin(\frac{1}{\Delta x})-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\sin(\tfrac{1}{\Delta x})\text{不存在}$$

(3) $x^2S(x)$ 在 $x=0$ 处可导

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin(\frac{1}{\Delta x})-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin(\tfrac{1}{\Delta x})=0$$

定理 4.2.1

(1) $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$

(2) $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(3) $(\frac{f(x)}{g(x)})'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ $(g(x)\neq 0)$

证明：只证(3)

令 $y=\frac{1}{g(x)}$，则有

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{1}{g(x+\Delta x)}-\frac{1}{g(x)}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)-g(x+\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{g(x)g(x+\Delta x)}$$

$$=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=f'(x)\frac{1}{g(x)}+f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$$

$$=f'(x)\frac{1}{g(x)}+f(x)\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right)$$

$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

例 4.2.1. $f(x)=\tan x$

$$f'(x)=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

$$=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

类似地 $(\cot x)'=-\csc^2 x$.

反函数求导

定理 4.2.2. $y=f(x)$ 在 (a,b) 内严格单调

令 $\alpha=\min\{f(a+0),f(b-0)\}$, $\beta=\max\{f(a+0),f(b-0)\}$

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导且 $f'(x)\neq 0$, 则 $f^{-1}(y)$ 在 (α,β) 内可导 $\frac{d}{dy}f^{-1}(y)=\frac{1}{f'(x)}$

证明: 易知 $f^{-1}(y)$ 在 (α,β) 内连续

$$\begin{aligned}(f^{-1}(y))'\Big|_{y=y_0} &= \lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}\\ &= \lim_{y\to y_0}\frac{x-x_0}{y-y_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}\\ &= \frac{1}{f'(x_0)}\end{aligned}$$

例 4.2.3. $y=\arctan x$

$x=\tan y$

$$\begin{aligned}y'=(\arctan x)' &= \frac{1}{(\tan y)'}\\ &= \frac{1}{\sec^2 y}\\ &= \frac{1}{1+\tan^2 y}\\ &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

类似地, $(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

复合函数

定理 4.2.3. 设 $y=f(u)$ 在 $U(u_0,\delta)$ 上 $u=g(x)$ 在 $U(x_0,\eta)$ 上定义, $u_0=g(x_0)$ $f'(u_0)$, $g'(x_0)$ 存在, 则 $F(x)=f(g(x))$ 在 x_0 处可导, 且 $F'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0)$

证略:

注: $F'(x)=f'(g(x))g'(x)$ 也记为 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ (链锁法则)

例 4.2.6 $y=\ln|x|$, $x=0$

当 $x>0$ $y=\ln x$, $y'=\frac{1}{x}$

当 $x<0$ $y=\ln(-x)$, $y'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$

则 $x\neq 0$ 时 $y'=\frac{1}{x}$

例 4.2.8 证明: 当 $n\geq 2$ 时

$$\sum_{k=1}^{n}C_n^k k^2=n(n+1)2^{n-2}$$

由 $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k$

求导得 $n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k k x^{k-1}$

乘以 x, 再求导

$$n(1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2}=\sum_{k=1}^{n}C_n^k k^2 x^{k-1}$$

令 $x=1$, 得

$$2n\cdot 2^{n-2}+n(n-1)2^{n-2}=\sum_{k=1}^{n}C_n^k k^2$$

即 $n(n+1)2^{n-2}=\sum_{k=1}^{n}C_n^k k^2$