Week 9 Lecture 14.

Plan: 1. 一些求导法

2. 微分的定义

## ※ 隐函数

$$\begin{cases} \text{显} & y=f(x) \\ \text{隐} & F(x,y)=0 \end{cases}$$

注：可隐含多个函数

e.g. $x^2+y^2=1$,

$y_1=\sqrt{1-x^2}$, $y_2=-\sqrt{1-x^2}$

例 4.2.9 Kepler's

$y-x-\varepsilon\sin y=0 \quad (0<\varepsilon<1)$

证明：可确定一个隐函数 $y=y(x)$

并求 $y'(x)$.

证明：令 $x=\varphi(y)=y-\varepsilon\sin y$

显然 $\lim\limits_{y\to-\infty}\varphi(y)=-\infty$, $\lim\limits_{y\to+\infty}\varphi(y)=+\infty$.

$\forall y_1<y_2$ 有

$$\varphi(y_2)-\varphi(y_1)=(y_2-y_1)-\varepsilon(\sin y_2-\sin y_1)$$
$$\geq(1-\varepsilon)(y_2-y_1)\geq 0$$

则 $\varphi(y)$ 是一个严格单调递增函数

故 $x=\varphi(y)$ 是一一对应

故确定了一个函数 $y=y(x)$

$y(x)$ 满足

$$y(x)-x-\varepsilon\sin(y(x))=0$$

求导得 $y'(x)-1-\varepsilon\cos(y(x))y'(x)=0$

则 $y'(x)=\dfrac{1}{1-\varepsilon\cos(y(x))}$.

## ※ 对数求导法

例 4.2.11 设 $y=xe^x$ 求 $y'$

取对数得 $\ln y=e^x\ln x$

求导得 $\dfrac{y'}{y}=e^x\ln x+e^x\dfrac{1}{x}$

则 $y'=ye^x(\ln x+\dfrac{1}{x})$

$=xe^xe^x(\ln x+\dfrac{1}{x})$

例 4.2.12. 求 $y=(1+\frac{1}{x})^{x^2}$ 的导数

取对数 $\ln y=x^2\ln(1+\frac{1}{x})$

$=x^2\ln\frac{x+1}{x}$

$=x^2(\ln(x+1)-\ln x)$

求导得 $\dfrac{y'}{y}=2x(\ln(x+1)-\ln x)+x^2(\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{2x}{x^2})$

化简得

$y'=2x(1+\frac{1}{x})^{x^2}[\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}]$

## ※ 参数函数

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \quad t\in(\alpha,\beta)$$

若 $t=t(x)$ 存在, $y=f(x)=y(t(x))$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$$

例 4.2.13 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0)$ 上点 $(x_0,y_0)$ 处的切线

解法一，隐函数求导

解法二，参数化

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases} \quad t\in[0,2\pi)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=-\frac{b\cos t}{a\sin t} \quad (t\neq 0,\pi)$$

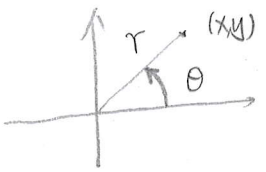
则当 $t\neq 0,\pi$ 时，点为 $(a\cos t_0, b\sin t_0)$

斜率为 $-\frac{b\cos t_0}{a\sin t_0}$，则切线方程为

$$y-b\sin t_0=-\frac{b\cos t_0}{a\sin t_0}(x-a\cos t_0)$$

当 $t=0,\pi$ 时，切线为 $x=\pm a$.

※极坐标 $r$ 极距 $\theta$ 极角




$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

曲线 $r=r(\theta)$, $\theta\in(\alpha,\beta)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(r(\theta)\sin\theta)'}{(r(\theta)\cos\theta)'}=\frac{\tan\theta+\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}{1-\tan\theta\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}$$

令 $\frac{dy}{dx}=\tan\alpha$

可知 $\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}=\tan(\alpha-\theta)\triangleq\tan\beta$

$(\beta=\alpha-\theta+k\pi)$




$\beta$：向径，切线的夹角

$0\leq\beta\leq\pi$

例 4.2.14. 双纽线

$r^2=a^2\cos 2\theta$ $(0<\theta<\frac{\pi}{4})$

证明 $\beta=2\theta+\frac{\pi}{2}$

$$\tan\beta=\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}=\frac{r^2(\theta)}{r(\theta)r'(\theta)}$$

$$=\frac{r^2(\theta)}{(\frac{1}{2}r^2(\theta))'}$$

$$=\frac{a^2\cos 2\theta}{(\frac{1}{2}a^2\cos 2\theta)'}$$

$$=-\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

$$=-\cot(2\theta)$$

当 $\theta\in(0,\frac{\pi}{4})$ $-\cot(2\theta)=\tan(2\theta+\frac{\pi}{2})$

于是 $\tan\beta=\tan(2\theta+\frac{\pi}{2})$

由 $2\theta+\frac{\pi}{2}\in(\frac{\pi}{2}+\pi)$ 知

$\beta=2\theta+\frac{\pi}{2}$

□

※微分

令 $S=\pi r^2$，考虑 $r$ 的变化 $\Delta r$

相应地 $\Delta S=\pi(r+\Delta r)^2-\pi r^2$

$$=2\pi r\Delta r+\pi(\Delta r)^2$$

$$=2\pi r\Delta r+o(\Delta r)$$

$(\Delta r\to 0)$

Def. 设 $y=f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 上有定义。若存在常数 $A$，s.t.

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$$

$(\Delta x\to 0)$

则称 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可微

并称 $A\Delta x$ 为 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的微分

记作 $dy = A\Delta x$ 或 $df(x_0) = A\Delta x$

( $dx = 1\Delta x = \Delta x$ )

定理 4.3.1 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处可微

$\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导。

证明: $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $x_0$ 处可微

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$$

即 $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + o(1) \quad (\Delta x \to 0)$$

即 $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$$

$\Leftarrow$ $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

于是 $$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + o(1) \quad (\Delta x \to 0)$$

则 $$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$$

即 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可微, 且

$$df(x_0) = f'(x_0)dx.$$

□

注: 1) 一元函数, 可微可导等同

$$df(x_0) = f'(x_0)dx$$

$$\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0} = f(x_0)$$

(2) 微分基本原理:

可微函数可在局部被线性逼近

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

例 4.3.1 近似 $\sqrt[3]{80}$

取 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 81$, $\Delta x = -1$

$f(x_0) = 3$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ $f'(x_0) = \frac{1}{108}$

$$\sqrt[3]{80} \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

$$= 3 + \frac{1}{108}(-1)$$

$$= 3 - \frac{1}{108} \approx 2.9907\cdots$$

事实上 $\sqrt[3]{80} = 2.990697\cdots$