Lecture 21

Plan: 1. 函数的极值

2. 函数的凹凸性(I)

回顾 (1) $f(x)$ 可导

$f(x)\uparrow \Leftrightarrow f'(x)\geq 0$

$f(x)\downarrow \Leftrightarrow f'(x)\leq 0$

(2) Fermat:

$f(x)$ 在 x_0 取极值, $f'(x_0)$ 存在 $\Rightarrow f'(x_0)=0$

但 $f'(x_0)=0$ (驻点), 未必有极值.

定理 5.4.2 设 $f(x)$ 在 $U_0(x_0,\delta)$ 内可导且在 x_0 处连续

(1) 若 $x_0-\delta<x<x_0$ 时 $f'(x)>0$

且 $x_0<x<x_0+\delta$ 时 $f'(x)<0$

则 $f(x)$ 在 x_0 取严格最大值

(2) 若 $x_0-\delta<x<x_0$ 时 $f'(x)<0$

且 $x_0<x<x_0+\delta$ 时 $f'(x)>0$

则 $f(x)$ 在 x_0 取严格最小值

(3) 若 $x\in U_0(x_0,\delta)$ 时 都有

$f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$

则 x_0 不是 $f(x)$ 的极值点.

关键: $f'(x)$ 在两侧是否变号.

例 5.4.3 求 $f(x)=(x+2)^2(x-1)^3$ 的极值

$f'(x)=2(x+2)(x-1)^3+3(x+2)^2(x-1)^2$

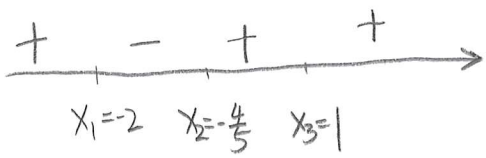
$=(x+2)(x-1)^2(2x-2+3x+6)$

$=(x+2)(x-1)^2(5x+4)$

令 $f'(x)=0$ 得三个驻点

$x_1=-2 \quad x_2=-\frac{4}{5} \quad x_3=1$

易检验



$f(-2)=0$

$f(-\frac{4}{5})=(\frac{6}{5})^2(-\frac{9}{5})^3$

则 $f(x)$ 在 $x_1=-2$ 取极大值 0

在 $x_2=-\frac{4}{5}$ 取极小值 $(\frac{6}{5})^2(-\frac{9}{5})^3$

在 $x_3=1$ 不取极值.

定理 5.4.3 设 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内 n 阶可导, $f'(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, 则

(1) n 为奇数时, $f(x)$ 在 x_0 不取极值

(2) n 为偶数时, $f^{(n)}(x_0)>0$ 则

$f(x)$ 在 x_0 取严格极小值

(3) n 为偶数时, $f^{(n)}(x_0)<0$ 则

$f(x)$ 在 x_0 取严格极大值.

证明：由带Peano余项的Taylor公式

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) \quad (x\to x_0)$$

$$=\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)\right)(x-x_0)^n \quad (x\to x_0)$$

而 $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)\right)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

则 $\exists \delta_1\in(0,\delta)$ s.t. 当 $x\in U(x_0,\delta_1)$，

$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)$ 与 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ 同号。

当 n 为奇数时，$f(x)-f(x_0)$ 在 x_0 两侧变号

因而 $f(x)$ 不在 x_0 取极值

当 n 为偶数，$f^{(n)}(x_0)>0$ 时

则 $\forall x\in U_0(x_0,\delta_1)$ 时，有

$$f(x)>f(x_0)$$

故 $f(x)$ 在 x_0 取极小值（严格）

当 n 为偶数，$f^{(n)}(x_0)<0$ 时

则 $\forall x\in U_0(x_0,\delta_1)$ 时，有

$$f(x)<f(x_0)$$

故 $f(x)$ 在 x_0 取极大值（严格）

注：最常用，$n=2$

$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)>0 \Rightarrow$ 极小

$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)<0 \Rightarrow$ 极大

例5.4.4 达布 Darboux 定理

设 $f(x)$ 在"$[a,b]$上可导"，则对于任意介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的数 η，都有在 $\xi\in(a,b)$ s.t. $f'(\xi)=\eta$.

证明：先证 $\eta=0$ 时

不妨设 $f'_+(a)>0$，$f'_-(b)<0$

由 $f'_+(a)>0$ 知，$\exists\delta_1>0$ s.t.

当 $x\in[a,a+\delta_1]$ 时 $f(x)>f(a)$

由 $f'_-(b)<0$ 知，$\exists\delta_2>0$ s.t.

当 $x\in[b-\delta_2,b]$ 时 $f(x)>f(b)$

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，则在 $[a,b]$ 上连续，则若记 $M=\max_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$

则 $\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $f(\xi)=M$

即 $f(x)$ 在 ξ 取极值（大）

由 Fermat 定理知 $f'(\xi)=0$.

一般地，构造 $F(x)=f(x)-\eta x$

由 $F'_+(a)=f'_+(a)-\eta$ 与 $F'_-(b)=f'_-(b)-\eta$ 异号知，$\exists\xi\in(a,b)$ s.t.

$F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)-\eta=0$.

注：(1) 可导未必导数连续

(2) 即使导数不连续 Darboux 仍成立

(3) $f(x)$ 在区间 I 上可导，$f'(x)>0$

则 $f(x)$ 在 I 上严格单调

(4) "极值"是局部性质，定义域内部的性质

例 5.45.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

易知 $f(x)$ 处处可导，但 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续。

☆ 最值的求法（在 $[a,b]$ 上）

1. 找预选点：

驻点，不可导点，端点

2. 挑出最大、最小值.

例 5.47 无盖圆柱形缸

底的厚度 = 3× 侧面厚度

容积一定，最省用料方案？



解：设侧面厚度为 δ

则底的厚度为 3δ

记容积为 V = 常数

设底面半径为 r，高为 h

$V=\pi r^2 h$，则 $h=\frac{V}{\pi r^2}$.

设用料体积为 S

$$S=\pi r^2\cdot 3\delta+2\pi rh\delta$$

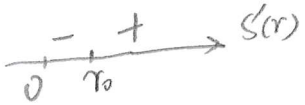
$$=\delta\left(3\pi r^2+\frac{2V}{r}\right),\ (r>0)$$

$$S'(r)=\delta\left(6\pi r-\frac{2V}{r^2}\right)$$

令 $S'(r)=0$，在 $[0,+\infty)$ 内有唯一零点 $r_0=\sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}$

通过 $S''(r_0)>0$

或



易知 当 $r>0$ 时 $S(r)$ 在 r_0 取最小值

此时对应的高

$$h_0=\frac{V}{\pi r_0^2}$$

$$=\frac{V}{\pi}\cdot\frac{3^{\frac{2}{3}}\pi^{\frac{2}{3}}}{V^{\frac{2}{3}}}$$

$$=3^{\frac{2}{3}}\frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{V^{\frac{1}{3}}}$$

$$=3r_0.$$