Plan: 1. 变限定积分

2. 定积分的计算

※ 变限定积分.

由可积理论若 $f(t)\in R[a,b]$，则

$\forall x\in[a,b]$，有 $f(t)\in R[a,x]$

Def. $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$，$x\in[a,b]$

称为 $f(t)$ 的变上限(定)积分

$\Psi(x)=\int_x^b f(t)dt$，$x\in[a,b]$

为 $f(t)$ 的变下限(定)积分.

定理7.4 设 $\Phi(x)$ 是函数 $f(t)\in R[a,b]$ 的变上限积分

(1) 若 $f(t)\in R[a,b]$，则 $\Phi(x)\in C[a,b]$

(2) 若 $f(t)\in C[a,b]$，则 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，并且 $\Phi'(x)=f(x)$.

证明: (1) 由 $f(t)\in R[a,b]$，$\exists M>0$ s.t.

$\forall t\in[a,b]$ 有 $|f(t)|\le M$.

$\forall x_0\in[a,b]$，当 $x\in[a,b]$ 时

$$|\Phi(x)-\Phi(x_0)|=\left|\int_a^x f(t)dt-\int_a^{x_0}f(t)dt\right|$$

$$=\left|\int_{x_0}^x f(t)dt\right|$$

$$\le\left|\int_{x_0}^x |f(t)|dt\right|$$

$$\le M|x-x_0|$$

则易知 $\Phi(x)\in C[a,b]$.

(2) 只证 $x_0\in(a,b)$ 时 $\Phi'(x_0)=f(x_0)$

(端点, 练习)

由 $f(t)$ 连续，$\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ 且 $\delta<\min\{b-x_0,x_0-a\}$ s.t. 当 $|t-x_0|<\delta$ 时

$$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$$

则当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时

$$\left|\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|$$

$$=\left|\frac{\int_a^x f(t)dt-\int_a^{x_0}f(t)dt}{x-x_0}-\frac{\int_{x_0}^x f(x_0)dt}{x-x_0}\right|$$

$$=\left|\frac{\int_{x_0}^x(f(t)-f(x_0))dt}{x-x_0}\right|$$

$$\le\frac{\int_{x_0}^x|f(t)-f(x_0)|dt}{|x-x_0|}$$

$$<\varepsilon\frac{|x-x_0|}{|x-x_0|}=\varepsilon$$

即证明了 $\Phi'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$

注(1) 若 $f(t)\in R[a,b]$ 且在 $x_0\in[a,b]$ 连续

则 $\Phi(x)$ 在 x_0 可导，且 $\Phi'(x_0)=f(x_0)$.

(2) 若 $f(t)\in C[a,b]$，则

若 $F(x)$ 为任一原函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+C$$

令 $x=a$，得 $C=F(a)$

再令 $x=b$，得 $F(b)=\int_a^b f(t)dt+F(a)$

即 $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$

(3) 存在原函数，未必可积

e.g. $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

是 $f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

的原函数

但 $f(x)$ 在含 $x=0$ 的区间上无界，故不可积

(4) 若 $f(t)\in C[a,b]$，$t=\varphi(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可导

且 $\forall x\in[\alpha,\beta]$，$\varphi(x)\in[a,b]$，则

$$G(x)=\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt,\quad x\in[\alpha,\beta]$$

是 $\Phi(u)=\int_a^u f(t)\,dt$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合

$$G'(x)=f(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

例 7.4.1. $D=\frac{d}{dx}\left(\int_x^{x^2} e^{-t^2}dt\right)$

解 $D=\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2} e^{-t^2}-\int_0^x e^{-t^2}dt\right)$

$$=e^{-x^4}2x-e^{-x^2}$$

例 7.4.2. $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t\,dt}{x^4}$

$\overset{LH}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2\cdot 2x}{4x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x^2}{4x^2}$

$\overset{t=x^2}{=}\lim\limits_{t\to 0+0}\frac{\sin t}{2t}$

$=\frac{1}{2}$.

4 定积分的计算

- 找原函数，牛顿-莱布尼茨
- 换元法
- 分部积分法

例 7.4.3 $f(x)=\begin{cases} -\sin x & x\geq 0 \\ x & x<0 \end{cases}$

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$

$$=-\left(\frac{\pi^2}{8}+1\right).$$

定理 7.4.2. 设 $f(x)\in C[a,b]$，$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数

且 $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$

$\alpha\leq t\leq\beta$ 时 $a\leq\varphi(t)\leq b$

则有 $\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$

证略.

注：(1) 若 $\varphi(\alpha)=b$，$\varphi(\beta)=a$，

$\alpha\leq t\leq\beta$ 时 $a\leq\varphi(t)\leq b$

则 $\int_a^b f(x)\,dx=\int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

(2) φ 连续 可减弱为可积

例 7.4.4. 设 $f(x)\in C[-a,a]$ $a>0$

证明 (1) 若 $f(x)$ 偶，$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

(2) 若 $f(x)$ 奇，则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

证略

eg. $\int_{-2020}^{2020} \frac{x+\sin(2019x)}{1+x^2}dx = 0$.

例 7.4.5 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $a>0$

令 $x = a\sin t$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $dx = a\cos t\,dt$

$x=0$ 时 $t=0$, $x=a$ 时 $t=\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{a^2\cos^2 t}\cos t\,dt$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin(2t)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4}a^2.$$

例 7.4.7 $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx \xrightarrow{t=\pi-x} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}dt$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$\Rightarrow I = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{4}.$$

例 7.4.8 设 $x_1, x_2 \in (-1,1)$

定义 $d(x_1,x_2) = \left|\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{1-x^2}\right|$ 双曲距离

阅读性质及证明

提示 (4) 的证明，用到 例 4.3.4.

定理 7.4.3 设 $u(x)$, $v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导

且 $u'(x), v'(x) \in R[a,b]$，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

例 7.4.9 $I = \int_0^1 x\ln(1+x)dx$

$$I = \int_0^1 x\ln(1+x)dx$$

解: $$I = \int_0^1 \ln(1+x)\,d\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x}\cdot\frac{x^2}{2}dx$$

$$= \frac{1}{4}$$

例 7.4.10 (1) 证明 $\forall n\in\mathbb{N}$，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \triangleq I_n$$

(2) 并求 I_n.

(1) 令 $x = \frac{\pi}{2}-t$，易证.

(2) 易知 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$

$$I_1 = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = |$$

当 $n>1$ 时

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}x \, d(-\cos x)$$

$$= -\sin^{n+1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,(n+1)\sin^{n}x\cos x\,dx$$

$$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^n x\,dx$$

$$= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$$

即 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

因此有 $I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$

$$I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, \quad k=1,2,\cdots$$

下面证 Wallis 公式

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$\forall n\in\mathbb{N}$，有

$$\sin^{2n+1}x < \sin^{2n}x < \sin^{2n-1}x$$

则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx$

$$< \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\,dx$$

由上题知

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

即

$$J_n \triangleq \left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n} \triangleq J_n'$$

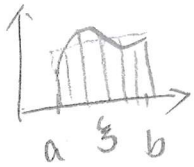
则 $0 \le \lim_{n\to\infty}(J_n' - J_n)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n(2n+1)}$$

$$\le \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2n} = 0$$

故 $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$.

※ 7.5 简介

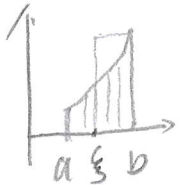


$\exists \xi\in[a,b]$ s.t.

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Thm 7.5.1. 若 $f(x)\in C[a,b]$，$g(x)\in R[a,b]$ 且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号

则 $\exists\xi\in[a,b]$ s.t. $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$



若 $f(x)\nearrow$，$f(x)\ge 0$

$\exists\xi\in[a,b]$ s.t.

$$\int_a^b f(x)dx = f(b)(b-\xi) = f(b)\int_\xi^b dx$$

Thm 7.5.3 设 $g(x)\in R[a,b]$

(1) $f(x)\nearrow$，$f(x)\ge 0$，则 $\exists\xi_1\in[a,b]$ s.t. $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_{\xi_1}^b g(x)dx$

(2) $f(x)\searrow$ $f(x)\ge 0$，则 $\exists\xi_2\in[a,b]$ s.t. $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^{\xi_2} g(x)dx$

(3) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调

则 $\exists \xi \in [a,b]$ s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)dx + f(b)\int_{\xi}^b g(x)dx$$

补例 7.3.1 设 $f(x) \in R[a,b]$

则 $\forall \varepsilon > 0$,

(1) 存在 $[a,b]$ 上的阶梯函数 $h(x)$

s.t. $\int_a^b |f(x)-h(x)|dx < \varepsilon$.

(2) 存在 $[a,b]$ 上的连续函数 $g(x)$

s.t. $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx < \varepsilon$

分析: (1) $f(x) \in R[a,b]$, $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \Delta$ s.t. $\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \varepsilon$

(2) 构造

$$F(x) = \begin{cases} M_i & x \in [x_{i-1}, x_i),\ i = 1, \cdots, n-1 \\ M_n & x \in [x_{n-1}, b] \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} m_i & x \in [x_{i-1}, x_i),\ i = 1, \cdots, n-1 \\ m_n & x \in [x_{n-1}, b] \end{cases}$$

取 $h(x)$ 为 $F(x)$ 或 $f(x)$

取 $g(x)$ 为连续 $(x_i, f(x_i))$ 的函数

应用: 设 $f(x) \in R[a,b]$, 则

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists g(x) \in C[a,b]$ s.t.

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 dx < \varepsilon$$

证明 由 $f(x) \in R[a,b]$

$\exists M$ s.t. $\forall x \in [a,b]$ $|f(x)| \le M$

由例 7.3.1 知, $\exists g(x) \in C[a,b]$ s.t.

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2M}$$

又由 $g(x)$ 的构造知

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 dx$$

$$\le \int_a^b |f(x)+g(x)| \cdot |f(x)-g(x)|dx$$

$$\le 2M \int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

$$\le \varepsilon.$$