Week 6 Lecture 8

Plan: 1. 柯西收敛准则
2. 上、下极限

※ Def. 设$\{x_n\}$一个序列

若$\forall \varepsilon>0$, $\exists N$ s.t. $\forall m,n>N$

有$|x_n-x_m|<\varepsilon$, 则称$\{x_n\}$是一个柯西序列 (Cauchy)

定理 2.4.6. (柯西收敛准则)

序列$\{x_n\}$收敛 $\Leftrightarrow$ 它是一个柯西列.

证明: $\Rightarrow$

设序列$\{x_n\}$收敛, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

则 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N$, s.t. $\forall n>N$, 有

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

则 $\forall m,n>N$, 有

$$|x_n-x_m| \le |x_n-a|+|x_m-a|<\varepsilon.$$

$\Leftarrow$

设$\{x_n\}$是柯西列

取$\varepsilon_0=1$, 则 $\exists N$, 当$n>N$时,

有 $|x_n-x_{N+1}|<1$

于是 $\forall n\ge N+1$, $|x_n|\le 1+|x_{N+1}|$

令 $M=\max\{|x_1|,\cdots,|x_N|,1+|x_{N+1}|\}$

则 $\forall n\in\mathbb{N}$, $|x_n|\le M$, $\{x_n\}$有界

由 Bolzano-Weierstrass, $\exists$收敛子列$\{x_{n_k}\}$.

记 $a=\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. 下证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$

$\forall \varepsilon>0$, $\exists K\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall k>K$

有 $|x_{n_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}$

由$\{x_n\}$是柯西列, $\exists N$, s.t. $\forall m,n>N$

$$|x_m-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $k>K$, 且 $n_k>N$. 则 $\forall n>N$

$$|x_n-a| \le |x_n-x_{n_k}|+|x_{n_k}-a|<\varepsilon$$

即有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. 图

(请阅读完备性)

例 2.4.10 (压缩映照原理)

设$f(x)$在$[a,b]$上有定义

$f([a,b])\subset[a,b]$, 且满足 $\forall x,y\in[a,b]$

$$|f(x)-f(y)|\le q|x-y|,\ 0<q<1$$

证明: 存在唯一的$c\in[a,b]$ s.t. $f(c)=c$.

证明: 任取$x_0\in[a,b]$

定义 $x_n=f(x_{n-1})$, $n=1,2,\cdots$

则 $|x_{n+1}-x_n|\le q|x_n-x_{n-1}|$

$$\le q^n|x_1-x_0|$$

则 $\forall n,p\in\mathbb{N}$

$$|x_{n+p}-x_n| \le \sum_{k=1}^{p}|x_{n+k}-x_{n+k-1}|$$

$$\le \sum_{k=1}^{p} q^{n+k-1}|x_1-x_0|$$

$$=\frac{1-q^p}{1-q}q^n|x_1-x_0|$$

$$<\frac{|x_1-x_0|}{1-q}q^n \triangleq Lq^n$$

其中 $L=\frac{|x_1-x_0|}{1-q}$.

则易知 $\{x_n\}$ 是柯西列，故收敛

记 $\lim_{n\to\infty} x_n = c$，$c \in [a,b]$

则 $|f(x_n) - f(c)| \le q|x_n - c|$

则有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$

对 $x_{n+1} = f(x_n)$ 取极限知 $c = f(c)$

若还有 $c' \in [a,b]$ $c' \neq c$ 满足

$f(c') = c'$，

则 $|c - c'| = |f(c) - f(c')|$

$\le q|c - c'|$，矛盾

故这样的 c 存在且唯一

上下极限

对于有界序列 $\{x_n\}$

令 $l_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$

$h_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$

显然，$l_1 \le l_2 \le \cdots \le l_n \le \cdots \le h_n \le \cdots \le h_1$

即 $\{l_n\}$，$\{h_n\}$ 为单调有界序列

令 $l = \sup_n \{l_n\} = \sup_n \inf_k \{x_{n+k}\}$

$h = \inf_n \{h_n\} = \inf_n \sup_k \{x_{n+k}\}$.

则 h，l 分别为 $\{x_n\}$ 的上，下极限

记为 $l = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n$

$h = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$

显然，$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \le \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$

对于无界序列，可类似定义.

定理 2.5.1 设 $\{x_n\}$ 有界，$h \in \mathbb{R}$

下面三角命题等价：

(1) h 是 $\{x_n\}$ 上极限

(2) $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$ s.t. 当 $n \ge N$ 时 $x_n < h + \varepsilon$

而 $\forall K \in \mathbb{N}$，$\exists n_K > K$ s.t. $x_{n_K} > h - \varepsilon$.

(3) 存在子列 $\{x_{n_K}\}$ s.t. $\lim_{K\to\infty} x_{n_K} = h$

对于其他收敛子列 $\{x_{n_K}\}$，有 $\lim_{K\to\infty} x_{n_K} \le h$.

证明：(1) $\Rightarrow$ (2)

$\forall n \in \mathbb{N}$，$h_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$

由 $\lim_{n\to\infty} h_n = h$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$ s.t.

当 $n \ge N$ 时有 $|h_n - h| < \varepsilon$

则 $\forall n \ge N$ $x_n \le h_n \le h + \varepsilon$

对 $\forall K > 0$，取 $n_K > \max\{N, K\}$

则有 $h_{n_K} > h - \varepsilon$

由 $h_{n_K} = \sup\{x_{n_K}, x_{n_K+1}, \cdots\}$ 知

存在 $n_K \ge n_{K'} > K$ 有（想想为什么）

$x_{n_K} > h - \varepsilon$，则 (2) 成立.

(2) $\Rightarrow$ (3)

由 (2) 易知可归纳地找到子列

$\{x_{n_K}\}$，s.t. $\lim_{K\to\infty} x_{n_K} = h$.

现考虑 $\{x_n\}$ 的任意收敛子列 $\{x_{n_K}\}$

并设 $\lim_{K\to\infty} x_{n_K} = h'$.

由(2)知，$\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，

当 $n>N$ 时，有 $x_n<h+\varepsilon$

则当 $k>N$ 时 $n_k\geq k>N$，有

$$x_{n_k}<h+\varepsilon$$

取极限知 $h'=\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}\leq h+\varepsilon$.

由 ε 的任意性知 $h'\leq h$.

(3) $\Rightarrow$ (1)

设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=h'$，望证 $h'=h$.

由(3)知 $\exists$ 子列 $\{x_{n_k}\}$ s.t.

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=h,$$

而由定义 $h_{n_k}\geq x_{n_k}$，则

由保序性 $h'\geq h$

若 $h'>h$，希望推出矛盾

事实上，若 h' 是 $\{x_n\}$ 上极限

可构造收敛子列，其极限大于 h.

(练习) 故与(3)矛盾，于是 $h'=h$.

※ 性质

(A) 定理 2.5.2

(1) 若有界序列 $\{x_n\}$ 互不相同，则

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ 是 $\{x_n\}$ 最大聚点，

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ 是 $\{x_n\}$ 最小聚点，

(2) $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 子列

则 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n\leq \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} x_{n_k}\leq \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} x_{n_k}\leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a \Leftrightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=a$

其中 a 可有限或无穷。

(B) 定理 2.5.3. $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ 有界序列

(1) $x_n\leq y_n$，$\forall n$ 成立

则 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n\leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n\leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$

(2)~(4) 四则运算. (略)

例 2.5.3 给定序列 $\{x_n\}$，$\alpha\geq 2$

令 $y_n=x_n+\alpha x_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$

证明：$\{y_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ 收敛

$\Leftarrow$ 显然，

$\Rightarrow$ $\{y_n\}$ 收敛则有界

故 $\exists M>0$. s.t. $\forall n$，$|y_n|\leq M$，且 $|x_1|\leq M$

若 $|x_n|\leq M$，则

$$|x_{n+1}|\leq \frac{1}{\alpha}(|y_n|+|x_n|)\leq M$$

故由归纳法知 $\{x_n\}$ 有界

记 $l=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$，$h=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$，均有限

又令 $b=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

考虑 $x_n=y_n-\alpha x_{n+1}$

取上，下极限知

$$\begin{cases} h=b-\alpha l \\ l=b-\alpha h \end{cases}$$

故 $(\alpha-1)l=(\alpha-1)h$，即 $l=h$

则 $\{x_n\}$ 收敛

□