数学模型 Lecture Notes

Zhennan Zhou

2018 年 4 月 24 日

PRELIMINARY DRAFT. NOT FOR WIDE CIRCULATION.

5 稳定性模型的应用分析

It is on the strength of observation and reflection that one finds a way.
So we must dig and delve unceasingly.

——Claude Monet

虽然动态过程的变化规律一般要用动态模型来描述，但是，对于某些实际问题，建模的主要目的并不是要寻求动态过程每个瞬时的性态，而是研究某种意义下稳定状态的特征，特别是当时间充分长以后，动态过程的变化趋势。

稳定性模型的分析离不开微分、差分方程的稳定性理论，甚至动力系统的其他知识。本章节中，我们只简单介绍稳定性理论的一些结论，而重点研究这些结论的在具体模型问题中的应用。由于差分方程的理论和微分方程的理论有很多的相似之处，我们在本章中忽略对差分方程的讨论。

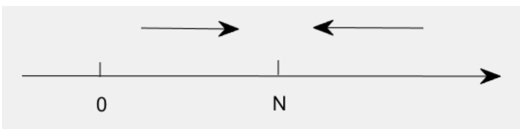
5.1 稳定性理论简介

5.1.1 引例：种群生长的logistic模型和相互竞争模型

当某个自然环境中只有一种生物的群体（生态学上成为种群）生存时，人们常用logistic模型来描述这个种群数量的演变过程，即

$$\dot{x}(t) = rx\left(1-\frac{x}{N}\right).$$

这里，$x(t)$是种群在时刻t的数量，r是固有增长率，N是环境资源容许的种群最大数量。从方程里，我们可以直观看出，当$t\to\infty$，我们有几种可能性：$x(t)\to 0$ 或者 $x(t)\to N$ 或者 $x(t)\to\infty$。如果最终$x(t)$有限，这两个平衡解在“稳定性”上有所不同吗？



通过简单的相图分析，我们认为$x=N$是一个“稳定”的平衡解，$x=0$是一个“不稳定”的平衡解。稍后，我们会正式定义平衡解的稳定性。

如果有甲乙两个种群，他们独立的在一个自然环境中生存时，数量的演变分别遵从logistic规律。记$x_1(t)$和$x_2(t)$是两个种群的数量，r_1和r_2是他们的固有增长率，N_1和N_2是他们的最大容量。于是对于两个种群，我们有

$$\dot{x}_1(t) = r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}\right),\quad \dot{x}_2(t) = r_2x_2\left(1-\frac{x_2}{N_2}\right).$$

这里，因子$\left(1-\frac{x_k}{N_k}\right), k=1,2$ 代表了各种群消耗有效资源而对他们本身的生长产生的阻滞作用。

如果甲乙这两个种群，不仅在一个自然环境中生存，而且消耗同一种有限资源的时候，他们各自的消耗会同时对甲乙两种种群的生长产生阻滞作用。不过需要注意的是，两种种群对这同一种资源的消耗水平可能是不同的。我们考虑下面的相互竞争模型

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right),\quad \dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(1-\frac{x_2}{N_2}-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}\right).$$

这里，σ_1的意义是，种群乙相对于N_2的单位数量对资源的消耗是种群甲相对于N_1的单位数量的消耗的σ_1倍。

一般来说σ_1和σ_2没有确定的关系。我们先可以考虑一个特殊的情况：两个种群在消耗资源中，对甲的增长的阻滞作用和对乙的增长的组织作用相同，具体表现为

$$1:\sigma_1=\sigma_2:1.$$

所以我们得到这种特殊的情况下，$\sigma_1\sigma_2=1$，即σ_1、σ_2互为倒数。

但是在具体的应用中，其实也有可能σ_1，σ_2同时小于1、同时大于1等其他的情况出现。（你能想出一些例子吗？）

为了研究两个种群的相互竞争的结局，即$t\to\infty$时，$x_1(t), x_2(t)$ 的趋向，我们不需要求解方程，只需要分析它们的平衡点。解下面的代数方程

$$r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right)=0,\quad r_2x_2\left(1-\frac{x_2}{N_2}-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}\right)=0.$$

我们得到4个平衡点：

$$P_1(N_1,0),\quad P_2(0,N_2),\quad P_3\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right),\quad P_4(0,0).$$

因为仅当平衡点在第一象限$(x_1,x_2\geq 0)$时才有实际意义，所以对于P_3，我们需要σ_1,σ_2同时大于1或者小于1。

为了讨论这些平衡点的稳定性，我们在下一节学习微分方程稳定性的基本理论。

5.2 微分方程稳定性理论

一阶微分方程的平衡点及稳定性

设有微分方程

$$\dot{x}(t)=f(x), \tag{5.1}$$

方程右端不显含自变量t，成为自治方程。而代数方程

$$f(x)=0$$

的根$x=x_0$称为(5.1)的平衡点（或奇点），显然也是(5.1)的解。

若存在某个邻域，使(5.1)的解$x(t)$从这个邻域的某个$x(0)$出发，满足

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=x_0,$$

则称平衡点x_0是稳定的（稳定性理论中称渐近稳定）；否则，称x_0是不稳定的（注意，很多教材关于不稳定有其他的定义）。

事实上，可以不求解方程就讨论平衡点的稳定性。

将$f(x)$在x_0点作Taylor展开，只取一次项，(5.1)近似为

$$\dot{x}(t) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{5.2}$$

(5.2)称为(5.1)的近似线性方程，x_0也是(5.2)的平衡点。我们有如下的结论：

- 若$f'(x_0) < 0$，则x_0对于(5.1)和(5.2)都是稳定的。
- 若$f'(x_0) > 0$，则x_0对于(5.1)和(5.2)都是不稳定的。

二阶微分方程的平衡点及稳定性

二阶微分方程可以用两个一阶微分方程表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2(t) = g(x_1, x_2). \end{cases} \tag{5.3}$$

我们只考虑有段不显含t的情况，即自洽方程。代数方程组

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = 0, \\ g(x_1, x_2) = 0, \end{cases}$$

的解$x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0$称为(5.3)的平衡点，记为$P_0(x_1^0, x_2^0)$。

若存在某个邻域，使(5.3)的解$x_1(t), x_2(t)$ 从这个邻域的某个 $(x_1(0), x_2(0))$ 出发，满足

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = x_1^0, \quad \lim_{t\to\infty} x_2(t) = x_2^0,$$

则称平衡点P_0是稳定的)；否则，称P_0是不稳定的（注意，很多教材关于不稳定有其他的定义）。

为了讨论(5.3)的平衡点的稳定性，我们可以用近似线性方法判断其平衡点$P_0(x_1^0, x_2^0)$。在P_0点将f和g作Taylor展开，只取一次项，我们得到(5.3)的近似线性方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_{x_1}(x_1^0, x_2^0)(x_1 - x_1^0) + f_{x_2}(x_1^0, x_2^0)(x_2 - x_2^0), \\ \dot{x}_2(t) = g_{x_1}(x_1^0, x_2^0)(x_1 - x_1^0) + g_{x_2}(x_1^0, x_2^0)(x_2 - x_2^0). \end{cases} \tag{5.4}$$

这里，我们记系数矩阵

$$A = \left.\begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{bmatrix}\right|_{P_0}$$

并且我们记

$$p = -(f_{x_1} + g_{x_2})|_{P_0}, \quad q = \det A.$$

关于P_0点的稳定性，我们有如下结论。

如果 (5.4) 的特征值实部不为0，则P_0对于 (5.3) 的稳定性与对于近似方程 (5.4) 的稳定性相同。若$p > 0, q > 0$，则平衡点稳定，若$p < 0$或$q < 0$, 则平衡点不稳定。

需要注意的是

- 平衡点及其稳定性的概念只适用于自治方程。
- 对于临界情况 $(f'(x_0) = 0$ 或者 $p, q = 0)$ 非线性方程和它的线性近似方程可以不一致。

再访种群竞争模型

跟据本节的理论，经过直接的计算，我们很容易得到P_3, P_4这两个平衡点的稳定性条件：P_3的稳定条件是$\sigma_1<1, \sigma_2<1$, 而P_4一定是不稳定的。

为了进一步研究P_1和P_2的稳定性，我们引入下面的相轨线分析。

记

$$\phi = 1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}, \quad \psi = 1-\frac{x_2}{N_2}-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}.$$

则方程可以表示为

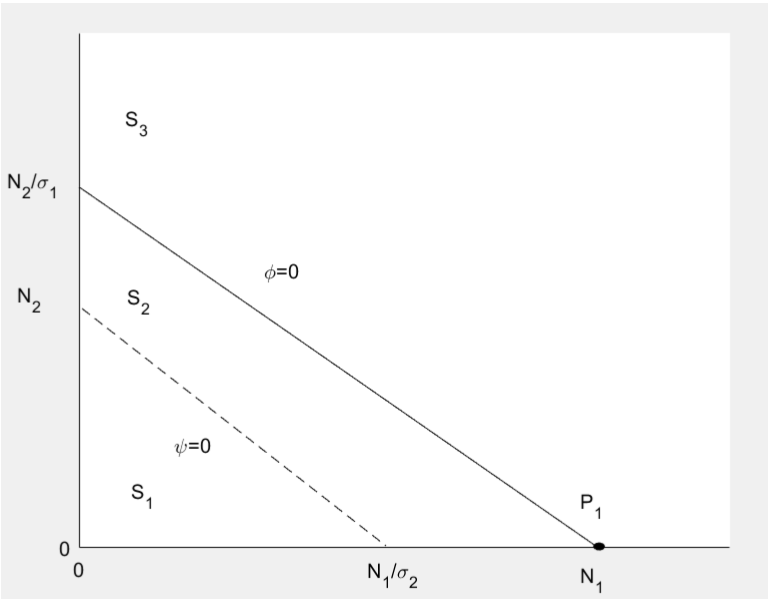
$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1\phi, \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2\psi.$$

根据$\phi=0$和$\psi=0$在相平面（$x_1, x_2\geq 0$）的相对位置不同，我们可以分成四种情况。

1. $\sigma_1<1, \sigma_2>1$. 如图，$\phi=0$和$\psi=0$将相平面分成了三个区域

$$S_1:\quad \dot{x}_1>0, \quad \dot{x}_2>0;$$
$$S_2:\quad \dot{x}_1>0, \quad \dot{x}_2<0;$$
$$S_1:\quad \dot{x}_1<0, \quad \dot{x}_2<0.$$

可以证明，无论轨线从哪个区域的任何一点出发，$t\to 0$都将趋于$P_1(N_1,0)$。这时候，我们也称P_1是全局稳定的。



2. $\sigma_1>1, \sigma_2<1$. 可证P_2是全局稳定的。

3. $\sigma_1<1, \sigma_2<1$. 可证P_3是全局稳定的。

4. $\sigma_1>1, \sigma_2>1$. 可证P_3是不稳定的，P_1, P_2是局部稳定的。

5.3 Volterra 食饵(Prey)-捕食者(Predator)模型（P-P系统）

食饵和捕食者在时刻t的数量分别记作$x(t)$, $y(t)$。设没有捕食者时，食饵独立生存时按照指数规律增长，增长率为r, 即$\dot{x}=rx$。而捕食者的存在使得食饵的增长率减少，设减小的程度与捕食者的数量成正比，于是$x(t)$满足

$$\dot{x}(t) = x(r-ay) = rx-axy. \tag{5.5}$$

比例系数a反映了捕食者掠取食饵的能力。

捕食者离开食饵无法生存，设它独自存在时死亡率为d, 即$\dot{y} = -dy$。而食饵的存在使得捕食者增长，设这种作用与食饵的数量成正比，于是$y(t)$满足

$$\dot{y}(t) = y(-d + bx) = -dy + bxy. \tag{5.6}$$

比例系数b反映了食饵对捕食者的供养能力。

容易求得，P-P系统的两个平衡点是

$$P_1\left(\frac{d}{b}, \frac{r}{a}\right), \quad P_2(0,0).$$

利用上节p, q的判别法，我们可以验证，P_2是不稳定的，而P_1是临界情况(p=0)，不能推断出这个点的稳定性。下面我们通过分析相轨线来进一步判断。

通过P-P系统的两个方程，可以得到

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(r - ay)}{y(-d + bx)}.$$

通过求解我们得知，该方程的相轨线为

$$x^d e^{-bx} y^r e^{-ay} = c,$$

这里常数c由初值条件决定。事实上，此相轨线为一个封闭曲线。

如果我们令

$$f(x) = x^d e^{-bx}, \quad g(y) = y^r e^{-ay}.$$

将他们的极值点记为x_0, y_0, 极大值记为f_m, g_m, 则不难知道

$$x_0 = \frac{d}{b}, \quad y_0 = \frac{r}{a}.$$

显然，(x_0, y_0)恰好是平衡点P_1.

于是对于给定的c, 我们考察相轨线的形状。

- 当$c = f_m g_m$时，相轨线退化成平衡点P_1。
- 当c由最大值$f_m g_m$减小时，相轨线是一族从P_1向外扩张的封闭曲线。（P_1称为中心。）

固定的相轨线等价于$x(t)$和$y(t)$是周期函数，我们记周期为T。事实上，我们可以求出$x(t)$, $y(t)$在一个周期内的平均值, 记为$\bar{x}$, $\bar{y}$。

我们可以将(5.6)改写成，

$$x = \frac{1}{b}\left(\frac{\dot{y}}{y} + d\right)$$

利用$y(0) = y(T)$, 我们求得

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \frac{d}{b}.$$

类似的，我们可以得到$\bar{y} = \frac{r}{a}$。也就是说，$\bar{x}$, $\bar{y}$正是轨线中心P_1的坐标。