数学模型　期中考试（1）

答题时请注意：

- 计算题需要有完整的解题步骤，证明题需要严密的论证过程。
- 没有出现在答题纸上的要点，视为答题人不知道或者没有能力阐述清楚。
- 答题纸上不需要抄题目。但是请标好答题序号。
- 请大家严格遵守考试纪律。祝大家考试顺利！

3. 对于 $u(x), 0 \le x \le 1$，考虑如下的能量泛函

$$E = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(u_x)^2 + W(u) \right) dx, \quad W(u) = -\frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4}.$$

（a）（15分）如果额外要求 $u(0) = u(1) = 1$，用泛函导数的定义推导泛函 E 的极值点所满足的 Euler-Lagrange 方程（直接使用 Euler-Lagrange 方程不得分）。并求一个满足边值条件的解。

（b）（15分）考虑 $u(x,t)$ 满足如下方程（注意边值条件和（a）中的不同）

$$u_t = u_{xx} - W'(u), \quad 0 < x < 1, \quad u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0.$$

按照平衡率模型，指出此时的通量函数和源函数。对于固定的时刻，我们也可以定义如上的能量泛函，这时，能量泛函也可以看成是时间的一元函数，记为 $E(t)$。证明：

$$\frac{d}{dt}E(t) \le 0.$$