数学模型　期中考试（1）

答题时请注意：

- 计算题需要有完整的解题步骤，证明题需要严密的论证过程。
- 没有出现在答题纸上的要点，视为答题人不知道或者没有能力阐述清楚。
- 答题纸上不需要抄题目。但是请标好答题序号。
- 请大家严格遵守考试纪律。祝大家考试顺利！

4. 考虑一个选择淘汰模型，$n(t,x)$ 代表某种密度函数，其中 $t \geq 0$, $a \leq x \leq b$，它满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} n(t,x) = b(x) n(t,x) - \varrho(t) n(t,x), \\ \varrho(t) = \displaystyle\int_a^b n(t,x)\,dx, \\ n(t=0) = n^0(x) > 0 \text{ for } x \in [a,b]. \end{cases}$$

这里 $b(x)$ 是一个光滑的生长率函数，在 $[a,b]$ 上的最小值大于0，其最大值为 $\bar{\varrho}$, 且只在唯一的一点 $c \in (a,b)$ 取到。证明，当 $t \to +\infty$ 时，$\varrho(t) \to \bar{\varrho}$，若 $x \in [a,b]$ 且 $x \neq c$，则 $n(t,x) \to 0$。（5分）