数学模型　期中考试（2）

Exam Date: June 3.　Time: 08:00 am to 09:40 am.（100 minutes）

答题时请注意：

- 计算题需要有完整的解题步骤，证明题需要严密的论证过程。
- 没有出现在答题纸上的要点，视为答题人不知道或者没有能力阐述清楚。
- 答题纸上不需要抄题目。但是请标好答题序号。
- 请大家严格遵守考试纪律。祝大家考试顺利！

1. (边值问题以及应用) 令 $\mathscr{L}u = -u''$。

a.（15分）考虑下面的两点边值问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}\phi - \phi = \lambda\phi, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \text{B.C.}: \quad \phi(0) = 0, \quad \phi'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

求出此问题的所有特征值 λ_n 和特征函数 $\phi_n(x)$。

b.（10分）考虑两点边值问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}u - u = \sin(x) + \beta, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \text{B.C.}: \quad u(0) = 0, \quad u'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

这里，$\beta \in \mathbb{R}$是一个参数，讨论 β取值不同时，此问题的解的个数。

c.（10分）我们在引入格林函数的时候也介绍了 Dirac delta function $\delta(x)$，这种广义函数在众多科学问题中有应用。考虑如下问题，对于 $E > 0$，$\psi(x)$ 满足

$$\mathscr{L}\psi = (E - \delta(x))\psi.$$

我们设方程的解有如下的形式

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx}, & x < 0 \\ Se^{ikx}, & x > 0. \end{cases}$$

不妨设 $k > 0$，根据方程直接求出 k 的表达式。假设 $\psi(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，根据 delta 函数的性质推导出 $\psi(x)$ 在 $x = 0$ 的另一个条件，并求出 S 和 R。