数学模型　期中考试（2）

Exam Date: June 3.　Time: 08:00 am to 09:40 am.（100 minutes）

答题时请注意：

- 计算题需要有完整的解题步骤，证明题需要严密的论证过程。
- 没有出现在答题纸上的要点，视为答题人不知道或者没有能力阐述清楚。
- 答题纸上不需要抄题目。但是请标好答题序号。
- 请大家严格遵守考试纪律。祝大家考试顺利!

2.（渐进分析初步）当 $\varepsilon \to 0$ 时，考虑如下抛射问题

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{(1+\varepsilon x)^2}, \quad x(0) = \alpha, \quad x'(0) = \beta.$$

以下，$c_1, c_2 \cdots$ 等都是 $O(1)$ 的常数。

a.（20分）如果 $\alpha = c_1$，$\beta = c_2\varepsilon$，令 $t^{\max}$ 为轨道达到最高点的时间，找到 $t^{\max}$ 的渐进表达式，精确到 $O(\varepsilon)$。(即误差是 $O(\varepsilon^2)$。)

b.（15分）如果 $\alpha = c_3/\varepsilon$，$\beta = c_4$，通过引入 $X(t) = x(t)\varepsilon$，求出 $X(t) \sim X_0(t) + \varepsilon X_1(t)$ 精确到 $O(\varepsilon)$ 的渐近展开解。