1. a. $-\phi''-\phi=\lambda\phi$

B.C. $\phi(0)=0 \quad \phi'(\frac{\pi}{2})=0$

特征多项式 $-c^2-1-\lambda=0$

$c^2=-1-\lambda$

当 $\lambda<-1$ 时 令 $\phi=C_1e^{\sqrt{-1-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-1-\lambda}x}$

由 B.C. 知 $C_1=C_2=0$，只有平凡解

当 $\lambda=-1$ 时 令 $\phi=C_1+C_2x$

由 B.C. 知 $C_1=C_2=0$，只有平凡解

当 $\lambda>-1$ 时 $\lambda+1>0$

令 $\phi=C_1\sin(\sqrt{\lambda+1}x)+C_2\cos(\sqrt{\lambda+1}x)$

由 $\phi(0)=0$ 知 $C_2=0$.

则 $\phi(x)=C_1\sqrt{\lambda+1}\cos(\sqrt{\lambda+1}x)$

由 $\phi'(\frac{\pi}{2})=0$ 时 $C_1\sqrt{\lambda+1}\cos(\sqrt{\lambda+1}\frac{\pi}{2})=0$

若解非平凡，则 $\cos(\sqrt{\lambda+1}\frac{\pi}{2})=0$

即 $\sqrt{\lambda+1}=2n+1$, $n=0,1,2,\cdots$

即 $\lambda_n=(2n+1)^2-1=4n^2+4n$, $n=0,1,2\cdots$

此时 $\phi_n=C_1\sin((2n+1)x)$, $n=0,1,2,\cdots$

其中 C_1 为不定常数

b. $-u''-u=\sin x+\beta$

$u(0)=0, \quad u'(\frac{\pi}{2})=0$

对应齐次方程的解为 $\phi_0=C_1\sin(x)$

由 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)(\sin(x)+\beta)\,dx=\beta+\frac{\pi}{4}$.

和 F.A. 知

当 $\beta=-\frac{\pi}{4}$ 时，此问题有无穷多个解

当 $\beta\neq-\frac{\pi}{4}$ 时，此问题无解

c. $-\psi''=(E-\delta(x))\psi$, $E>0$

当 $x\neq0$ 时，$-\psi''=E\psi$

通解为 $\psi=C_1e^{\sqrt{E}x}+C_2e^{-\sqrt{E}x}$

对比可知，$k=\sqrt{E}$

$\forall\varepsilon>0$，将方程在 $[-\varepsilon,\varepsilon]$ 上积分得

$-\psi'(\varepsilon)+\psi'(-\varepsilon)=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}E\psi\,dx-\psi(0)$

令 $\varepsilon\to0$ 得（由 ψ 在 $x=0$ 处连续）

$\psi'(0+)-\psi'(0-)=\psi(0)$

又由 $\psi(0+)=\psi(0-)$，我们有

$$\begin{cases}1+R=S\\ ikS-(ik-ikR)=S\end{cases}$$

$\Rightarrow S=\frac{i2k}{i2k-1} \quad R=\frac{1}{i2k-1}$

2. a. 令 $X(t)\sim X_0(t)+\varepsilon X_1(t)+\varepsilon^2X_2(t)\cdots$

$-\frac{1}{(1+\varepsilon X)^2}=-1+2\varepsilon X-3\varepsilon^2X^2+O(\varepsilon^2)$

$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{(1+\varepsilon X)^2}$

$L.H.S.=X_0''(t)+\varepsilon X_1''(t)+\varepsilon^2X_2''(t)+\cdots$

$R.H.S.=-1+2\varepsilon X_0+\varepsilon^2(2X_1-3X_0^2)+\cdots$

对初值展开

$X_0(0)+\varepsilon X_1(0)+\varepsilon^2 X_2(0)+\cdots = C_1$

$X_0'(0)+\varepsilon X_1'(0)+\varepsilon^2 X_2'(0)+\cdots = C_2\varepsilon$

则得到子问题

(BVP 0) $X_0''=1,\quad X_0(0)=C_1,\ X_0'(0)=0$

(BVP 1) $X_1''=2X_0,\quad X_1(0)=0,\ X_1'(0)=C_2$

解 (BVP 0) 得 $X_0=-\frac{1}{2}t^2+C_1$

再解 (BVP 1) 得 $X_1=-\frac{1}{12}t^4+C_1t^2+C_2t$

即 $X(t)\sim(-\frac{1}{2}t^2+C_1)+\varepsilon(-\frac{1}{12}t^4+C_1t^2+C_2t)$

$X(t)\sim(-t)+\varepsilon(-\frac{1}{3}t^2+2C_1t+C_2)$

令 $t\sim t_0+\varepsilon t_1$，代入 $X(t)=0$ 得

$O(1)\quad t_0=0 \Rightarrow t_0=0$

$O(\varepsilon)\quad -t_1+C_2=0 \Rightarrow t_1=C_2$

则 $t_{max}\sim 0+C_2\varepsilon$

b. 由 $X(t)=\varepsilon x(t)$，知 $X(t)$ 满足

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{d^2X}{dt^2}=-\frac{1}{(1+X)^2}$$

$X(0)=\varepsilon x(0)=C_3$

$\sim X_0(0)+\varepsilon X_0(0)$

$X'(t)=\varepsilon x'(0)=C_4\varepsilon$

$\sim X_0'(0)+\varepsilon X'(0)$

可得子问题

(BVP 0') $X_0''=0\quad X_0(0)=C_3\quad X_0'(0)=0$

(BVP 1') $X_1''=-\frac{1}{(1+X_0)^2},\ X_1(0)=0,\ X_1'(0)=C_4$

解 (BVP 0') 得 $X_0=C_3$

代入解 (BVP 1') 得 $X_1''=-\frac{t^2}{2(1+C_3)^2}+C_4t$

即 $X(t)\sim C_3+\varepsilon(-\frac{t^2}{2(1+C_3)^2}+C_4t)$.

3. a. 定义状态空间 $S=\{1,2,3,4\}$

有如下对应

1 ⟷ 一年级生

2 ⟷ 二年级生

3 ⟷ 毕业

4 ⟷ 退学

则状态转移矩阵为

	1	2	3	4
1	0.15	0.7	0	0.15
2	0	0.1	0.8	0.1
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

令 $h(x)$ 为现在状态为 x 的最终毕业的概率，显然

$h(1)=0.15h(1)+0.7h(2)$

$h(2)=0.1h(2)+0.8$

解得 $h(2)=\frac{8}{9}\quad h(1)=\frac{112}{153}$

则新生毕业概为 $\frac{112}{153}$

令 $g(i)$ 表示为从状态 i 开始到毕业或退学的时间期望 则

$$g(1) = 0.15(g(0)+1) + 0.7(g(2)+1) + 0.15\cdot 1$$
$$= 0.15g(1) + 0.7g(2) + 1$$
$$g(2) = 0.1(g(2)+1) + 0.9\times 1$$
$$= 0.1g(2) + 1$$

解得 $g(2) = \frac{10}{9}$, $g(1) = \frac{320}{153}$

期望时间为 $\frac{320}{153}$ 年.

b. 令 X_n 表示在 n 轮游戏后，赌徒的赌资，$X_n \in \{0,1,\cdots,N\}$, $n=0,1,2,\cdots$

转移矩阵中，$\{P_{ij}\}$ $i,j \in \{0,\cdots,N\}$

$P_{00}=1$, $P_{NN}=1$

当 $i=1,\cdots,N-1$ 时

$P_{i,i+1}=p$, $P_{i,i-1}=q=1-p$

其余元素为 0.

令 f_i 为从 i 块赌资开始，最终赌资达到 N 的概率

则 $f_0=0$ $f_N=1$

$$f_i = pf_{i+1} + qf_{i-1}, \quad i=1,\cdots,N-1$$

注意到

$$f_{i+1} - f_i = \frac{q}{p}(f_i - f_{i-1}), \quad i=1,\cdots,N-1$$

易得 $f_i = \begin{cases} \frac{1-(\frac{q}{p})^i}{1-(\frac{q}{p})} f_1, & \frac{p}{q}\neq 1 \\ i f_1 & \frac{p}{q}=1 \end{cases}$

$i=1,2,\cdots,N$

利用 $f_N=1$ 得

$$f_i = \begin{cases} \frac{1-(\frac{q}{p})^i}{1-(\frac{q}{p})^N} & \frac{p}{q}\neq 1 \\ \frac{i}{N} & \frac{p}{q}=1 \end{cases}$$

令 $N\to\infty$ 得

$$f_i = \begin{cases} 1-(\frac{q}{p})^i & p>\frac{1}{2} \\ 0 & p\leq\frac{1}{2} \end{cases}$$

即若 $p>\frac{1}{2}$，有一定正概率赌资无限增长

若 $p\leq\frac{1}{2}$，赌徒以概率1破产.