数学模型 HW 1

Due Date: March 2, 在教学网上提交.

2020 年 2 月 18 日

鼓励相互讨论，但是请独立完成作业的写作。

1. 考虑如下的变化率模型

$$\frac{dA}{dt} = -A + B, \quad \frac{dB}{dt} = A - B,$$
$$A(0) = A_0 > 0, \quad B(0) = B_0 > 0.$$

I. 求 $(\bar{A}, \bar{B}) \in \mathbb{R}^2$，使得模型中的变化率函数在 $(\bar{A}, \bar{B})$ 的取值为 0, 而且 $\bar{A} + \bar{B} = A_0 + B_0$.

II. 证明当 $x > 0$ 时，$\ln x + \frac{1}{x} - 1 > 0$，并用它来证明，$t \geq 0$时

$$A \ln\left(\frac{A}{\bar{A}}\right) + B \ln\left(\frac{B}{\bar{B}}\right) \geq 0.$$

III. 令 $G(t) = A(1 + \ln A) + B(1 + \ln B)$, 证明

$$\frac{dG}{dt} \leq 0.$$

2. 考虑一维空间的的 viscous Burgers' equation

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

I. 如果要把它写成守恒律（conservation law）的形式，通量函数是什么？

II. 考虑著名的Hopf-Cole Transformation

$$u(x,t) = -a\frac{\partial}{\partial x} \log \phi(x,t).$$

证明$a = 2\mu$时候，ϕ满足

$$\frac{1}{\phi}\phi_t - \mu \frac{1}{\phi}\phi_{xx} = g(t)$$

这里$g(t)$一个t的任意函数。

III. 如果 $\mu = 0$, 且 $u(x,t) = v\left(\frac{x}{t}\right)$, 根据 Burgers' equation 推导出 $v(y)$ 满足的常微分方程。

3. I. 我们在讲义中对空间一维的时候推导了守恒律方程 $u_t + (J)_x = 0$. 请模仿这个推导过程并利用高斯散度定理推导高维空间的守恒律方程：

$$u_t + \nabla \cdot \boldsymbol{J} = u_t + \sum_{n=1}^{m} (J_n)_{x_n} = 0.$$

（只需要考虑源函数为0的情况。）

II. 对于一般的经典哈密顿量$\mathscr{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ （换句话说不再有 $\mathscr{H}=T+V$ 的假设，但关于 $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 充分光滑），证明

$$\frac{d}{dt}f(t,\boldsymbol{q}(t),\boldsymbol{p}(t))=0.$$

4. 对于空间一维的薛定谔方程，

I. 证明

$$\frac{d}{dt}\int|u(x,t)|^2dx=0.$$

为了简化证明，我们假设$u(x,t)$只在有界的空间区域内不为0.

II. 令 $\rho(x,t)=|u(x,t)|^2$，可以利用薛定谔方程推出一个守恒律的形式

$$\rho_t+(J)_x=0.$$

求 J 的表达式。