数学模型 HW 2

Due Date: March 16, 交于教学网.

2020 年 3 月 4 日

鼓励相互讨论，但是请独立完成作业的写作。

1. 教材二，第19页， 1.3。（注意，我们可以在北大图书馆下载到此书的电子版）

2. 教材二，第19页， 1.4。

3. 教材二，第20页， 1.7 (a)(b)。

4. 考虑关于传染病的的 Susceptible-Infected （SI）模型。我们用 u 表示未感染者的数量，v 表示患者数量。他们的时间演化满足如下的模型

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u = B - \mu_u u - r u v, \\ \frac{d}{dt}v = r u v - \mu_v v. \end{cases}$$

这里，$B > 0$ 表示出生率，$r > 0$ 表示感染系数，$\mu_u > 0$ 表示死亡率，$\mu_v > 0$ 表示康复率。

a. 找到这个系统的平衡解，和平衡解有实际意义的条件。

b. 定义

$$\bar{u} = \mu_v / r, \quad \bar{v} = \frac{rB - \mu_u \mu_v}{r\mu_v}, \quad \bar{S}(u,v) = -\bar{u}\ln(u) - \bar{v}\ln(v) + u + v.$$

证明

$$\frac{d}{dt}\bar{S} = -\frac{1}{u}(\sqrt{\bar{u}B} - u\sqrt{\bar{v}r + \mu_u})^2.$$

c. 当 $rB \le \mu_u \mu_v$ 时，定义

$$\bar{u}_0 = B/\mu_u, \quad \underline{S}(u,v) = -\bar{u}_0 \ln(u) + u + v.$$

证明

$$\frac{d}{dt}\underline{S} = -\frac{v}{\mu_u}\left(\mu_v\mu_u - rB\right) - \frac{1}{\mu_u u}\left(B - \mu_u u\right)^2.$$

d. (附加题，不算入成绩) 基于以上对 $\bar{S}$ 和 $\underline{S}$ 的分析，你能得出什么关于这个系统在 $t \to +\infty$ 的结论吗？尝试证明你的结果。

5. 对于种群的相互依存模型，

a. 计算 P_1 P_2 的稳定条件。

b. 对于 $\sigma_2 < 1, \sigma_1\sigma_2 < 1$ 的情形，分析相轨线的趋势，并画出示意图。

6. 对于依赖于参数 r 的一维系统，

$$\dot{x} = x^3 - x + r.$$

讨论不同参数取值的时候，系统的平衡点的个数和稳定性。请在一个横轴为 x，纵轴为 r 的平面将平衡点画出来（稳定平衡点用实线，不稳定平衡点用虚线）。