数学模型 HW 3

Due Date: March 30, 交于教学网.

2020 年 3 月 16 日

鼓励相互讨论，但是请独立完成作业的写作。

1. 教材二，第40页， 2.4（a）（b）。（注意，我们可以在北大图书馆下载到此书的电子版）

2. 教材二，第40页， 2.6（a）（b）。

3. 教材二，第40页， 2.12 （a）（b）。

4. 在不可压缩情况下（$\nabla \cdot v = 0$）从ρ和$\boldsymbol{j}$满足的守恒律方程推导出

$$\boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}.$$

5. 考虑一维的 Traffic flow equation

$$u_t + (1-u)u_x = 0.$$

如果已知

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x > 1 \text{ or } x < -1 \\ 1 - |x|, & |x| \le 1 \end{cases}$$

a. 对于$0 < t < 1$，利用特征线法求方程的解，并画出$u(x,1)$。

b. 对于$t > 1$，求激波解，并在 $x-t$ 平面画出带激波的特征线图。

6. 在反映扩散方程的行波解问题中，我们考虑 ignition temperature model。试根据讲义完成下面这个事实的证明：

我们下面证明，存在唯一的解 (c^*, v)，使得 $v(x)$ 是一个递减函数， $v(0) = \theta$, 而且 $c^* > 0$。这里，$v(0) = \theta$ 可以理解为，为了找到唯一解而选取的可解性条件。

(提示：讲义中已经帮你完成了部分计算，但是有三处细节没有完成：(a). there exists a $c^* > 0$; (b). such c^* is unique; (c). the corresponding v function is decreasing. 但是，不要只证明这三个地方，请写出完整的证明。)