北京大学

数学模型课程期末作业

题目：**期权定价理论中的数学模型**

——对比二叉树模型与 B-S 模型及其改进模型 MEM

院　　系：数学科学学院

小组成员：范哲睿 1900010670

韩善禹 1900010680

方欣玥 1900010616

田　洋 1900010617

指导教师：周珍楠

二〇 二一 年 六 月

摘要

本文就期权定价理论中的数学模型进行讨论分析，主要对比二叉树模型、Black-Scholes 模型和其改进模型 MEM。首先介绍二叉树模型，考虑一期二叉树模型的欧式期权定价，由浅入深地给出多期二叉树模型欧氏期权的定价公式。然后介绍 Black-Scholes 原始模型，推导期权定价的 B-S 偏微分方程，在此基础上引入对 B-S 模型进行改进后的混合指数跳跃扩散模型（MEM），并讨论 MEM 在欧式看涨期权定价、回望期权定价和障碍期权定价中的推导与应用。最后，从低频交易与高频交易、“路径依赖”的代价及现实应用中的精确程度分析等角度对比模型的应用价值。

关键字：期权定价　二叉树期权定价模型　Black-Scholes 模型　混合指数跳跃扩散模型

目录

一、问题背景 1

二、符号说明 1

三、基本假设 2

四、二叉树期权定价模型 2

4.1 模型建立 2

4.2 模型分析与推导 2

五、Black-Scholes 模型以及其改进模型 MEM 3

5.1 B-S 原始模型以及 B-S 方程 3

5.2 B-S 模型的改进：混合指数跳跃扩散模型 (MEM) 4

5.2.1 模型建立 4

5.2.2 模型推导与应用——欧式看涨期权定价 5

5.2.3 模型推导与应用——回望期权定价 6

5.2.4 模型推导与应用——障碍期权定价 7

六、模型的分析与对比 8

6.1 离散与连续：低频交易与高频交易 8

6.2 复杂的模型：“路径依赖”的代价 8

6.3 用事实说话：现实应用中的精确程度分析 9

附录 A 首次通过时间指数幂期望算法的证明 11

1.1 引理 1：$G(x) = \alpha$ 的根 11

1.2 引理 2：一个 OIDE 的求解 11

1.3 该计算方法的证明 12

附录 B 期权定价的 Black-Scholes 公式 15

参考文献 16

一、 问题背景

作为现今最受关注的衍生产品之一，期权有着漫长而曲折的发展历史。近代期权的起源可以追溯到 17 世纪的荷兰，在当时，郁金香是贵族社会身份的象征，人们对郁金香的狂热追求促进了郁金香交易市场的迅速发展。随着交易需求的上涨，批发商普遍出售远期交割的郁金香以获取更多的利润。为了减少风险、确保利润，批发商和郁金香种植者达成协议，在未来特定时间以事先规定的价格进行交易，这就是期权交易的雏形。

此后的几百年内，资本主义国家经历了工业革命，经济的迅速发展也推动了期权交易的发展，至 1973 年芝加哥期权交易所的成立标志着真正有组织的期权交易时代的开始。18 世纪以来，许多经济、金融学家纷纷致力于对期权理论的研究，试图搭建更精确的数学模型，以切合期权市场的需求。

期权是出售人和持有人之间的一种合约，二者就决定进行交易的资产在交易金额上达成一致，而后该合约赋予期权持有人在某一特定日期或该日期之前的任何时间以事先约定的固定价格购进或售出该资产的权利。这一期权价格是期权合约中唯一随市场供求变化而改变的变量，期权定价的合理与否直接影响到买卖双方的盈亏状况和交易的满意度，因此，期权定价问题自期权市场形成以来就广受关注。

1973 年，Fisher Black 和 Myron Scholes 提出了 Black-Scholes 期权定价模型，并荣获诺贝尔经济学奖，这是期权理论史上第一个完整的期权定价模型。B-S 模型是期权定价中使用范围最广的模型，现今绝大部分所有从事期权交易者都利用基于这一模型开发的计算程序对期权交易进行评估。1979 年，John Carrington Cox、Stephen A. Ross、Mark Rubinstein 又提出了二叉树模型（Binomial Model），建立了期权定价数值法的基础。而后人们在这两个模型的基础上不断改进，期权定价理论也逐渐趋于成熟。

近年来，随着中国经济的飞速进步，国内的期权市场也发展迅速。2015 年上证 50ETF 期权于上海证券交易所上市，这是国内首只场内期权品种，宣告了中国期权时代的到来。而后几年内，豆粕期权、白糖期权、铜期权等相继上市，中国期权市场逐步走向正轨。

下面对本文中所涉及的期权定价理论中的专有名词做简要解释。

- **标的物**：期权的标的物指合约双方选择购买或出售的资产，它包括股票、政府债券、货币、股票指数、商品期货等。在本文中，我们考虑的都是以股票作为标的物的“股票期权”。
- **行权日**：期权的行权日指合约双方约定的到期日。
- **行权价**：期权的行权价指合约双方约定的资产交易价格。

二、 符号说明

符号	意义
r	无风险利率
B_T	无风险资产在 T 时的价值
S_T	股票在 T 时的价格
K	看涨期权的行权价
M	看跌期权的行权价
H	障碍期权的界限值
C_T	欧式看涨期权在 T 时的价值
V_T	组合资产在 T 时的价值
τ_b	首次通过界限 b 的时间
$LP(T)$	回望看跌期权在 T 时的价值
$UIC(T)$	障碍期权在 T 时的价值
η_i/θ_j	混合指数分布密度函数的参数

三、 基本假设

“FEAR the BOOM and BUST(涨跌可畏)”，市场的力量是强大的，正如现实的金融世界是复杂的，可以说没有任何一套理论能对它有一个完美的刻画。为了建立数学模型并进行研究，我们必须先对金融市场做一些最基本的假设，尽管其中一些不是完全符合现实的，但离开这些假设，我们将寸步难行。

- **市场有收益率固定的无风险资产**　如果某个资产的收益率是一个随机变量，我们称它为风险资产，否则称之为无风险资产。无风险资产的收益率我们称为一个无风险收益率。现实世界中短期内的一年期零息国债就是一个例子。
- **市场有做空机制**　我们不去在意“做空”的具体金融学含义，只认为对任何资产我们既可以持有正数单位，同时也可以持有负数单位，即持有量 $x \in \mathbb{R}$。如果我们持有负数单位的某资产，我们称之为持有它的“空头”，正数则称为“多头”。
- **市场不存在套利机会**　虽然“套利”的严格定义需要用到金融经济学中支付矩阵的代数学性质，但在本文中我们只需假定：任何无风险资产的收益率必然与某个无风险利率相等，否则我们就称存在一个套利机会。易推断：无套利机会下的市场无风险利率有且仅有一个，我们记之为 r。
- **投资者是风险中性的**　风险中性意味着投资者只关心资产产出的平均水平而对其波动抱有无所谓的态度。考虑一个风险资产，它的产出和收益率都是随机变量，在风险中性的条件下，我们的定价只需关心该随机变量的均值而对其方差可以不予考虑。
- **无套利定价的基本原理**　结合“风险中性”以及“无套利”的假设，可以得到我们定价理论的根基：资产现时价值等于其未来价值的均值贴现值。或者用数学表述：假设资产在 T 时刻的价值为随机变量 C_T，市场的无风险利率为 r，那么它在 0 时刻价值为:

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^T} E(C_T)$$

  有时候上式中的贴现因子 $\frac{1}{(1+r)^T}$ 也可以近似替换为 e^{-rT}，或者使用其微分形式进行推导。并且，本文中即使使用了其他的方法计算某资产的定价，其根本思想也应当与上者符合。

除了这些假设之外，还必须再对本文所探讨的期权进行一些必要说明：

(1) 普通欧式期权只能在特定的行权日以约定的行权价 K 被执行。它分为两种：看涨期权 (Call) 和看跌期权 (Put)。对于前者，在行权日，一方有购买的权力，另一方有出售的义务；而后者则恰好相反。同一支股票的这两种期权价格可以通过方程相互求解。

(2) 除了普通欧式期权以外，金融市场上还存在着许多“奇异期权”，它们的执行规则各不相同，例如“回望期权”、”障碍期权” 等等，后文中会给出具体解释。

四、 二叉树期权定价模型

4.1 模型建立

二叉树期权定价模型 [4] 的模型假设：

- **模型的基础是“时间离散”的**　模型将考察的存续期分为若干阶段，每一个阶段称为一期，并称现时时刻为第 0 期。经过整数时期 T 之后的时刻称为第 T 期，也记为 $t = T$ 时刻。时间离散的假定意味着我们只能在 t 等于某整数的时刻观察股票价格，并进行股票或期权交易。
- **每经过一期股票价格只有向上和向下两个波动方向**　如果股票价格在第 T 期的价格是 S_T，那么我们假定下一期的股票价格（随机变量）S_{T+1} 只有两种取值可能，其中一种比 S_T 大，而另一种比 S_T 小。
- **每一期股票价格向上或向下波动的比例为定值**　用数学语言表达：对于随机变量 S_{T+1}，我们更进一步地假定对任意 T，它的分布列是：

$$P(S_{T+1} = uS_T) = q \quad P(S_{T+1} = dS_T) = 1 - q$$

  其中 $u > 1$，$d < 1$。q 我们暂时未知。

4.2 模型分析与推导

首先来考虑**一期模型的欧氏看涨期权定价**。在此情况中，股票下一期的价格只有上升或下降两种可能，且 S 上升到 uS 的概率为 q，下降到 dS 的概率为 $(1-q)$，其中 $u > 1 + r > d > 0$。一个行权价为 X 的欧氏看

涨期权在 $t=1$ 时的价值，以 q 的概率取 $C_u=\max(uS-X,0)$，$1-q$ 的概率取 $C_d=\max(dS-X,0)$。

事实上，在无套利的基本假设下，概率 q 是可求的，下面我们来进行推导：

构造一个在 $t=0$ 时总投资为 $(S-mC)$ 的投资组合，$t=1$ 时，它的价值以概率 q 取值 $uS-mC_u$，以概率 $1-q$ 取值 $dS-mC_d$。我们选择 m 使此投资组合在 $t=1$ 的两种状态下取值相等，即:

$$uS-mC_u=dS-mC_d \tag{1}$$

由此得到

$$m=\frac{S(u-d)}{C_u-C_d} \tag{2}$$

在这个 m 下，这个资产组合是一个无风险资产。根据无套利机会的假设：该投资组合的的收益率为 r，期初投资 $(S-mC)$ 在 $t=1$ 时的价值为 $(1+r)(S-mC)$，即：

$$(1+r)(S-mC)=uS-mC_u=dS-mC_d \tag{3}$$

由此解出

$$C=\frac{S[(1+r)-u]+mC_u}{m(1+r)} \tag{4}$$

式 (4) 可改写为:

$$C=\frac{1}{1+r}\{C_u[\frac{(1+r)-d}{u-d}]+C_d[\frac{u-(1+r)}{u-d}]\} \tag{5}$$

注意到：上式大括号内 C_u 和 C_d 的系数和刚好为 1。根据无套利定价基本原理：$C_0=\frac{1}{1+r}E[C_1]$，对应上式可解出概率 q：

$$q=\frac{(1+r)-d}{u-d} \tag{6}$$

它也被称为“风险中性概率”，有了它以后，一期二叉树期权定价公式可记为：

$$C=\frac{1}{1+r}[qC_u+(1-q)C_d] \tag{7}$$

根据无套利假设可以证明：每一期股票价格上升的概率都是这个“风险中性概率” q。那么在 $t=T$ 时刻，股票的价格服从**二项分布**，对应的欧式看涨期权在 $t=0$ 的价格为：

$$\begin{aligned} C&=\frac{1}{(1+r)^T}\sum_{n=0}^{T}\mathbf{C}_T^n q^n(1-q)^{T-n}\cdot C_{u^n d^{T-n}} \\ &=\frac{1}{(1+r)^T}\sum_{n=0}^{T}\frac{T!}{(T-n)!n!}q^n(1-q)^{T-n}\max\{u^n d^{T-n}S-X,0\} \end{aligned} \tag{8}$$

其中 q 如 (6) 被确定。这就是 T 期二叉树模型欧氏看涨期权的定价公式。

五、 Black-Scholes 模型以及其改进模型 MEM

5.1 B-S 原始模型以及 B-S 方程

首先给出 Black-Scholes 模型 [7] 的模型假设：

- **模型的基础是“时间连续”的** 在这里我们考虑一段时间 $0\le t<T$ 内任意时刻对欧式看涨期权的定价问题，假定股票价格 $\{S_t\}$ 是一个随机过程。期权在 t 时刻的价值 $C_t=g(t,S_t)$，其中 g 是一个 C^2 的函数。
- **股票的价格服从几何布朗运动** 对于金融学分析来说，如果用布朗运动来描述股票价格，很大的一个问题是——它有可能会变成负值，但资产价格肯定不会是负的。所以考虑使用“几何布朗运动”来描述股票价格，它的微分形式如下：

  $$dS_t=\mu S_t dt+\sigma S_t dW_t$$

  其中 W_t 为标准布朗运动。

假设市场上存在股票和无风险债券两种资产，它们的价格分别为 S_t 和 B_t，两种资产价格的运动方程为：

$$\begin{cases} dS_t=\mu S_t dt+\sigma S_t dW_t \\ dB_t=rB_t dt \end{cases} \tag{9}$$

我们要做的是求解在时间 t 以及股票价格为 S_t 时，期权的价格 $C_t=g(t,S_t)$。

我们考虑构造这样的组合资产——**在 t 时刻持有一单位的期权和 $\frac{\partial g}{\partial S}(t,S_t)$ 单位的股票空头(也就是 $-\frac{\partial g}{\partial S}(t,S_t)$ 单位的股票)**。那么我们持有的组合资产在 t 时刻的价值为：

$$V(t,S_t)=g(t,S_t)-\frac{\partial g}{\partial S}(t,S_t)S_t \tag{10}$$

我们对上述方程做微分，来观察该组合资产价值随时间的变化。值得注意的是：在微分的时候，$\frac{\partial g}{\partial S}(t,S_t)$ 应该视为常数，因为一旦我们选定了所持有股票的比例，时间从 t 流逝到 $t+\Delta t$ 期间我们是不能对它进行修改的，于是下面我们将它简记为 $\frac{\partial g}{\partial S}$ 并视为常数。由伊藤引理：

$$\begin{aligned}dV(t,S_t)&=dg(t,S_t)-\frac{\partial g}{\partial S}dS_t\\&=\left(\frac{\partial g}{\partial t}dt+\frac{\partial g}{\partial S}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial S^2}(dS_t)^2\right)-\frac{\partial g}{\partial S}dS_t\\&=\frac{\partial g}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial S^2}(\mu S_t dt+\sigma S_t dW_t)^2\\&=\frac{\partial g}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2 dt\end{aligned} \tag{11}$$

可以看到，该组合资产价值的微分不含有随机项，说明其价值变化只与时间相关，这是一个“无风险资产”，它提供不受随机因素影响的稳定收益。那么根据无套利原理，该资产的收益率必然等于无风险利率 r，用微分形式表达是：

$$dV(t,S_t)=rV(t,S_t)dt \tag{12}$$

将之前得到的组合价值微分代入上式左侧，再将 V 的定义式代入右侧，并进行化简：

$$\left(\frac{\partial g}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2\right)dt=\left(rg-r\frac{\partial g}{\partial S}S_t\right)dt \tag{13}$$

这样一来我们就得到了期权价格 $g(t,S_t)$ 符合的、大名鼎鼎的 Black-Scholes 偏微分方程：

$$\frac{\partial g}{\partial t}+r\frac{\partial g}{\partial S}S_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2=rg \tag{14}$$

5.2 B-S 模型的改进：混合指数跳跃扩散模型 (MEM)

Ning Cai, S. G. Kou 在 2011 年发表的论文 Option Pricing Under a Mixed-Exponential Jump Diffusion Model[1] 中提出了一种基于 B-S 模型的新的期权定价模型——混合指数跳跃扩散模型 (MEM)。它对 B-S 模型进行了改进与推广，拓宽了定价理论的适用范围并提高了精确程度。

MEM 模型的一大优势在于它可以给一些“奇异期权”进行定价 (而 B-S 模型只是针对普通欧式期权)。比较有代表性的是它对“回望期权”和“障碍期权”的处理。

5.2.1 模型建立

MEM 模型同样基于“时间连续”的假设，但对于股票价格运动的描述有了突破性的创新。他在原有 B-S 模型的基础上，增加了**股票价格 S_t 的不连续变化**，即所谓的“**跳跃**”。它的假定如是：股票价格 S_t 满足如下的运动方程：

$$\frac{dS_t}{S_{t-}}=rdt+\sigma dW_t+d\left(\sum_{i=1}^{N_t}(V_i-1)\right) \tag{15}$$

这个方程的第三项即为所谓的跳跃项，而我们通过选取合适的 V_i 让其跳跃的分布能够更加贴合实际情况。

该式的随机性有三个相互独立的来源：W_t、N_t、V_i。

- W_t 为标准布朗运动
- $\{N_t|t\geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程
- $\{Y_i:=\ln V_i|i=1,2,\ldots\}$ 是一列独立同分布的服从**混合指数分布**的随机变量

其中 Y_i 有概率密度函数 $f_Y(x)$ 定义如下：

$$f_Y(x)=p_u\sum_{i=1}^{m}p_i\eta_i e^{-\eta_i x}\cdot\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}}+q_d\sum_{j=1}^{n}q_j\theta_j e^{\theta_j x}\cdot\mathbf{1}_{\{x<0\}} \tag{16}$$

这里对其中的参数做一些说明：

$$
\begin{aligned}
&p_u \geq 0, q_d = 1 - p_u \geq 0.\\
&p_i \in (-\infty, +\infty), \forall i \in 1, 2, ..., m, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.\\
&q_j \in (-\infty, +\infty), \forall j \in 1, 2, ..., n, \sum_{i=1}^{n} q_j = 1.\\
&\eta_i > 1, \forall i \in \{1, 2, ..., m\}.\\
&\theta_j > 0, \forall j \in \{1, 2, ..., n\}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

我们不妨假设 η_i, θ_j 均为升序排列。这里需要特别注意的是，由于 p_i 和 q_j 都可能是负数，因此我们还需要让这些参数满足某些条件，使得 $f_Y(x)$ 是恒非负的，进而是一个概率密度函数。一个使得 $f_Y(x)$ 是概率密度函数的必要条件是 $p_1 > 0, q_1 > 0, \sum_{i=1}^{m} p_i\eta_i \geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^{n} q_j\theta_j \geq 0$，而一个简单的充分条件是 $\sum_{i=1}^{k} p_i\eta_i \geq 0, \forall k \in \{1, 2, ..., m\}$ 且 $\sum_{j=1}^{l} q_j\theta_j \geq 0, \forall l \in \{1, 2, ..., n\}$。

此外，条件 $\eta_i > 1, \forall i \in \{1, 2, ..., m\}$ 是用于保证 S_t 具有有限的数学期望。

在上述 MEM 模型下，我们定义这样一个随机过程 $\left\{X_t := \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\right\}$，并称它为**对数收益过程**，则利用伊藤公式 (学习自 cf. Protter [6],II.Theorem 32,p.72) 可得：

$$
X_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i. \tag{18}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
\mu &= r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda(E[e^{Y_1}] - 1).\\
E[e^{Y_1}] - 1 &= p_u \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i\eta_i}{\eta_i - 1} + q_d \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j\theta_j}{\theta_j + 1} - 1.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

经过一些简单的计算，我们得到 X_t 的指数生成函数

$$
E[e^{xX_t}] = e^{G(x)t}, \quad t \geq 0, \quad x \in (-\theta_1, \eta_1). \tag{20}
$$

其中：

$$
G(x) = \frac{\sigma^2}{2}x^2 + \mu x + \lambda(p_u \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i\eta_i}{\eta_i - x} + q_d \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j\theta_j}{\theta_j + x} - 1). \tag{21}
$$

5.2.2 模型推导与应用——欧式看涨期权定价

考虑给欧式看涨期权定价。由无套利定价基本原理，期权的价格为

$$
C_T = e^{-rT} \cdot E[\max(S_T - K, 0)] \tag{22}
$$

我们引入一个规模因子 $X > K$，令 $k_c = \ln(X/K)$ 则期权的价格可以表示为：

$$
C_T(k_c) = e^{-rT}X \cdot E\left[\max\left(\frac{S_T}{X} - e^{-k_c}, 0\right)\right] \tag{23}
$$

为了化简和求解上述带有随机变量的方程，需要使用到拉普拉斯变换 (Laplace Transforms)，我们参考 Steven Kou 在 2005 年发表的论文 [5] 中的方法形式地推导：

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_c(\psi) &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\psi k_c} E\left[\max(\frac{S_0 e^{X_T}}{X} - e^{-k_c}, 0)\right] dk_c\\
&= e^{-rT} \int_{-X_T - \ln S_0}^{+\infty} e^{-\psi k_c} E\left[\frac{S_0 e^{X_T}}{X} - e^{-k_c}\right] dk_c\\
&= e^{-rT} E\left[S_0 e^{X_T} e^{\psi(X_T + \ln S_0)} \frac{1}{\psi X^\psi} - e^{X_T} e^{(\psi+1)(X_T + \ln S_0)} \frac{1}{(\psi+1)X^\psi}\right]\\
&= e^{-rT} \frac{S_0^{\psi+1}}{\psi(\psi+1)X^\psi} E\left[e^{(\psi+1)X_T}\right]
\end{aligned}
\tag{24}
$$

如果限定 ψ 的范围在 $(0, \eta_1 - 1)$ 内，根据之前求得的 X_t 的指数生成函数有：

$$
E\left[e^{(\psi+1)X_T}\right] = e^{G(\psi+1)T} \tag{25}
$$

结合 (24) 和 (25)，最终得到 MEM 下的期权定价方程：对于任意的 $\psi \in (0, \eta_1 - 1)$ 有：

$$\hat{C}(\psi) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\psi k_c} C_T(k_c) dk_c = e^{-rT} \frac{S_0^{\psi+1} e^{G(\psi+1)T}}{\psi(\psi+1)X^{\psi}} \tag{26}$$

其中 $G(\cdot)$ 的定义见 (21) 式。

我们之所以选择化简成这个形式的方程作为最终结果，是因为它能通过某些数值计算的方法有效地得到数值解，在现实中具有相当的应用价值。事实上，这个数值计算的方法通常是“欧拉双侧反演法 (two-side Euler inversion)”，但本文并不将它作为重点。

5.2.3 模型推导与应用——回望期权定价

回望期权 (Lookback options)[3] 是一种收益依赖于有效期内股票曾达到的最大或最小价格的奇异期权，它的这种特性被称之为“路径依赖”。回望期权也分为看涨 (Lookback Call) 和看跌 (Lookback Put) 两种。

以行权价为 M 的回望看跌期权为例，在行权日 T，它的产出由 $0 \le t < T$ 内股票的最大价格 $\max\limits_{0\le t<T} S_t$ 以及股票的最终价格 S_T 共同决定：

- 若 $M - S_T > \max\limits_{0\le t<T} S_t - S_T$，则售出股票，收益为 $M - S_T$
- 若 $M - S_T < \max\limits_{0\le t<T} S_t - S_T$，不售出股票，但得到补偿 $\max\limits_{0\le t<T} S_t - S_T$

根据无套利定价基本原理，回望看跌期权的价格为：

$$\begin{aligned} LP(T) &= e^{-rT} E\left[\max(M, \max_{0\le t\le T} S_t) - S_T\right] \\ &= e^{-rT} E\left[\max(M, \max_{0\le t\le T} S_t)\right] - S_0 \end{aligned} \tag{27}$$

由于回望期权“路径依赖”的性质，对它的处理不能直接照搬 (24) 式的方法。

我们必须丰富我们的模型，引入“首次通过时间” $\tau_b := \inf\{t \ge 0 : X_t \ge b\}$，其中 $b > 0$。

下面再介绍一个关于首次通过时间指数幂期望的计算方法。**需要说明的是：以下这部分内容的推导和论述过程均学习自 Ning Cai, S. G. Kou 在 2011 年发表的论文 Option Pricing Under a Mixed-Exponential Jump Diffusion Model[1]，由于篇幅限制，我们将其证明放在附录**。

首先，对于充分大的 α，方程 $G(x) = \alpha$ 共有 $m+n+2$ 个不同的实根，其中 $m+1$ 个为正根，而 $n+1$ 个为负根。我们将它们记为：

$$-\infty < \gamma_{n+1,\alpha} < \cdots < \gamma_{1,\alpha} < 0 < \beta_{1,\alpha} < \cdots < \beta_{m+1,\alpha} < +\infty \tag{28}$$

我们再定义两个矩阵:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{\eta_1}{\eta_1 - \beta_{1,\alpha}} & \frac{\eta_1}{\eta_1 - \beta_{2,\alpha}} & \cdots & \frac{\eta_1}{\eta_1 - \beta_{m+1,\alpha}} \\ \frac{\eta_2}{\eta_2 - \beta_{1,\alpha}} & \frac{\eta_2}{\eta_2 - \beta_{2,\alpha}} & \cdots & \frac{\eta_2}{\eta_2 - \beta_{m+1,\alpha}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\eta_m}{\eta_m - \beta_{1,\alpha}} & \frac{\eta_m}{\eta_m - \beta_{2,\alpha}} & \cdots & \frac{\eta_m}{\eta_m - \beta_{m+1,\alpha}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathrm{diag}\{e^{\beta_{1,\alpha} b}, e^{\beta_{2,\alpha} b}, \cdots, e^{\beta_{m+1,\alpha} b}\}$$

那么我们有:

$$E\left[e^{-\alpha\tau_b}\right] = \sum_{l=1}^{m+1} d_l \tag{29}$$

其中 d_i 满足：向量是 $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \cdots, d_{m+1})^T$ 是下面线性方程组的解：

$$(\mathbf{AB}) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{1} = (1, 1, \cdots, 1)^T \tag{30}$$

有了这个补充的方法，我们回到对 (27) 式的处理。首先对对数收益过程 $\{X_t\}$，我们补充定义随机过程 $\{M_X(t) := \max(0 \le k < t : X_k)\}$ 代表 X_t 的历史最大值。有：

$$e^{-rT}E\left[\max(M, \max_{0\le t<T} S_t)\right] = e^{-rT}E\left[\max(M, S_0 e^{M_X(T)})\right] \tag{31}$$

令 $z = \ln(M/S_0)$ 那么上式继续变形可得：

$$\begin{aligned}
&= S_0 e^{-rT} E[\max(e^z, e^{M_X(T)})] \\
&= S_0 e^{-rT} E[(e^{M_X(T)-e^z})\mathbf{1}_{\{M_X(T)\ge z\}}] + Me^{-rT} \\
&= S_0 e^{-rT}\int_0^{+\infty}(e^y - e^z)\mathbf{1}_{\{y\ge z\}} f_{M_X(T)}(y)dy + Me^{-rT} \\
&= S_0 e^{-rT}\int_z^{+\infty} e^y P(M_X(T)\ge y)dy + Me^{-rT}
\end{aligned} \tag{32}$$

我们记上式为 $L(S_0, M, T)$，并对它进行拉普拉斯变换 (Laplace Transform)，有：

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha T} L(S_0, M, T)dT = S_0\int_z^{+\infty} e^y\left[\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+r)T} P(M_X(T)\ge y)dT)\right]dy + \frac{M}{\alpha+r} \tag{33}$$

由分部积分法，根据边界项为零，我们有：

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+r)T} P(M_X(T)\ge y)dT &= \frac{1}{\alpha+r}\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+r)T} dP(M_X(T)\ge y) \\
&= \frac{1}{\alpha+r}\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+r)T} dP(\tau_y \le T) = \frac{1}{\alpha+r}E[e^{-(\alpha+r)\tau_y}]
\end{aligned} \tag{34}$$

当我们取 α 充分大时，应用之前介绍的方法可将上式继续化为：

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+r)T} P(M_X(T)\ge y)dT = \frac{1}{\alpha+r}\sum_{i=1}^{m+1} d_i e^{-\beta_{i,\alpha+r}y} \tag{35}$$

上式中的 d_i 稍后再解释它的含义，我们继续将这个结果带回到 (33) 式中，得：

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha T} L(S_0, M, T)dT = \frac{S_0}{\alpha+r}\sum_{i=1}^{m+1} d_i\int_z^{+\infty} e^{-(\beta_{i,\alpha+r}-1)y}dy + \frac{M}{\alpha+r} \tag{36}$$

对其中每一项直接计算它的积分并将 $z = \ln(M/S_0)$ 代回，得：

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha T} L(S_0, M, T)dT = \frac{S_0}{\alpha+r}\sum_{i=1}^{m+1}\frac{d_i}{\beta_{i,\alpha+r}-1}\left(\frac{S_0}{M}\right)^{\beta_{i,\alpha+r}-1} + \frac{M}{\alpha+r} \tag{37}$$

经过这些努力，我们终于得到了可以进行数值计算的回望看跌期权定价方程：

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha T} LP(T)dT = \frac{S_0}{\alpha+r}\sum_{i=1}^{m+1}\frac{d_i}{\beta_{i,\alpha+r}-1}\left(\frac{S_0}{M}\right)^{\beta_{i,\alpha+r}-1} + \frac{M}{\alpha+r} - \frac{S_0}{\alpha} \tag{38}$$

回顾在式 (35) 处结论的得出，可知 d_i 应满足 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{d} = \mathbf{1}$。

5.2.4 模型推导与应用——障碍期权定价

障碍期权的具体含义请参照 [2]。现实中存在 8 种障碍期权，这里只考虑向上敲入看涨期权 (UIC) 的情况。根据无套利定价基本原理 UIC 的期权价格为 $E[e^{-rT}\max((S_T-K),0)\mathbf{1}_{\{\tau_b<T\}}]$。$b = \ln(H/S_0)$ 是对数收益过程 X_t 的界限，其中 H 表示界限值，由障碍期权本身性质决定。

我们仍然引入规模因子 X，并以 k 代替 $\ln(X/K)$，将 UIC 的期权价格写成以下形式：

$$UIC(k,T) = E[Xe^{-rT}\max((\frac{S_T}{X} - e^{-k}),0)\mathbf{1}_{\{\tau_b<T\}}] \tag{39}$$

这里我们对 UIC(T) 采用双重拉普拉斯变换，并应用类似于“首次通过时间”指数期望的运算方法，得到以下可以进行数值计算的障碍期权定价方程：

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\psi k-\alpha T} UIC(k,T)dkdT = \frac{S_0^{\psi+1}\sum_{l=1}^{m+1} w_l e^{-\beta_{l,\alpha+r}b}}{X^\psi\psi(\psi+1)(r+\alpha-G(\psi+1))'} \tag{40}$$

其中，$\mathbf{w} := (w_1, w_2, \ldots, w_{m+1})$ 是线性方程 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{j}$ 的解，$\mathbf{A}$ 与 $\alpha+r$ 的定义与 5.2.3 中一致，以及

$$\mathbf{j} = e^{(\psi+1)b}(1, \frac{\eta_1}{\eta_1-\psi-1}, \frac{\eta_2}{\eta_2-\psi-1}, \cdots, \frac{\eta_m}{\eta_m-\psi-1})^T$$

关于这个定价方程的推导细节，请参照 [1] 中附录部分的证明。

六、 模型的分析与对比

如果说对一个数学模型的建立、分析和应用是一系列数学问题，那么对它的评价则不全是甚至完全不是数学家应该关心的事情。但是不可否认的是，想要将我们建立的数学模型应用到现实中去，光靠深奥的数学理论和一颗聪明的大脑是不够的，它需要有相关的专业人士做出判断和评价，并在实践中经受检验和改进。而关于本文所探讨的期权定价问题，要知道提出上述这些模型的人全然不在乎菲尔兹奖的桂冠花落谁家，他们基本都是在华尔街上驰风掣雨的业界人士。这似乎在启示我们：让我们的大脑接受“数学”和“专业知识”的某种组合会优于单一的填充。

接下来，我们就来对之前介绍过的模型进行评价与对比，并探讨它们之间的关系。在这个过程中，我们必须要联系现实金融世界的一些现象和特征、使用一些金融术语、探讨一些金融学问题。至于必要性相信已经阐释清楚了，读者大可不必认为这样做偏离了**“建立数学模型”**的本心。

6.1 离散与连续：低频交易与高频交易

或许通常我们会认为模型从离散到连续的变化是一个很大程度上的进步，正如会有人认为“简陋”的二叉树期权定价模型是一个更加初等的版本。但其实不然，从金融学的角度来讲，离散的模型和连续的模型分别对应着两种现实中的交易模式——低频交易与高频交易。(通过一些复杂但不困难的证明其实可以说明：二叉树模型和原始的 B-S 模型正是同一事实在这两个情境下的不同表述而已。)

对于某一项金融资产，例如股票或者期权，似乎我们所能观察到的价格数据都是离散时间 (discrete time) 的。但是现实中当大量的交易被同时进行，每有一笔交易，价格信息就更新一次，这就成了我们能观察到的最高频率数据——逐笔交易数据 (transaction by transaction data)。在一个规模相当的交易所中，每秒发生的交易数量都十分庞大，因此每秒都有大量的交易数据被更新，价格信息在不停地跳动、变更。在这种情况下，离散的交易无限地近似于一个连续过程。

交易频率的差异是巨大的。由于价格信息几乎是在时时变动，在今天买入资产并在明天卖出它仍然是一个相对低频的操作。事实上，在一些金融行业发达的地方，一些证券公司或投资公司在专门从事着“金融工程”的工作：通过计算机代替人力进行单量大、频率高的金融资产交易，其每比交易的资产持有时间甚至进入了微妙、毫秒的规模，这种交易方式可以说是高频交易的极致。

而交易频率正是决定模型应用的一个重要因素。当我们考虑在一段连续时间内进行多次频繁的交易，我们持有的资产规模和比例可以随着价格信息的变化在极短时间内迅速变动，这就要求我们的定价模型必须是时间连续的；而当我们只考虑买入某一资产，并在很长的一段时间后 (1 年甚至更长的时间) 执行交易，那么令我们的资产价值对时间作微分则是不现实的，更实用的是应该考虑两个或者几个阶段内资产上升或下跌的宏观幅度，这个时候则需要一个离散的模型进行描述。

具体而言我们来考虑：假定你是某量化投资公司的经理，当你在考虑设计你们期权交易投资的计算机程序时，如果你十分在意你自己的业绩，请问你是否能安心地应用二叉树定价方法进行设计呢？再比如说一位普通的投资者希望购买一 2 年期的股票期权，在估值的时候又是否有必要使用 B-S 模型或者应用 MEM 的数值近似方法呢？从这两个例子中我们可以体会到离散和连续模型应用场景的区别。

但是有必要说明的是，离散与连续的选择并不完全取决于交易的频率，很多时候还必须考虑到交易的额度、对冲风险等因素。或者我们可以从另外一个角度来说：频率的高低具有相对性。

二叉树定价方法并不是被连续模型所取代的古老产物，恰恰相反，二叉树定价模型的提出是在 B-S 模型普及之后，这也反应了它的生命力。在现实中，二叉树定价模型和 B-S 等连续模型都是世界各大证券交易所的主要定价标准之一。遗憾的是：尽管交易频率对对期权定价有很大的影响，但由于金融市场的极度复杂性，我们并不能完全说明二者使用条件的具体界限 (有些时候甚至二叉树的“方便性”也会成为其优势)。

6.2 复杂的模型：“路径依赖”的代价

我们可能通常认为较为复杂的模型比较完善和先进，但如果一个复杂的模型没能在应用结果上做出任何改进，那么它增加或改变的使模型更加复杂的条件都是无意义甚至有害的。我们选择了 MEM 作为本文的主要模型，既然不是为了展现任何高深的数学推导，那么就说明它的“复杂”是合理的。

最明显的进步便是：对“回望期权”和“障碍期权”这两种奇异期权的可处理性。

为了说明这一点，我们就必须探讨“奇异期权”产生和存在的现实背景。事实上，期权乃至奇异期权这一系列金融衍生品并不是用来赌博的工具，它们的发展程度从某种角度来讲反应了金融体系的完善性，从而间接反应了社会经济资源利用的有效性。

那么这些奇异期权具体来说有什么意义呢？拿“回望期权”来说：如果投资者购买了普通期权，股价在行权日之前持续上升但在行权日突然暴跌，期权仍将变为废纸一张，购买期权的钱都打了水漂；但如果他购买的是回望看涨期权，股价在行权日之前的变动对他的收益也会有补偿。在这种情况下他对期权的购买信心会明显增强，当投资者的资金能够顺利的进入金融系统运作，市场的有效性就体现出来了。但是其实这并不是关键，最主要的是这些奇异期权的存在使得金融市场具有了更强的“**完备性**”(可以理解为投资者的投资偏好可以被尽可能满足)。

但是像“回望期权”这类奇异期权没有被充分普及的一大原因就是其定价问题。回顾我们根据无套利基本原理得到的“回望期权”初步定价公式：

$$\begin{aligned} LP(T) &= e^{-rT}E\left[\max(M, \max_{0\le t<T} S_t) - S_T\right] \\ &= e^{-rT}E\left[\max(M, \max_{0\le t<T} S_t)\right] - S_0 \end{aligned}$$

注意到期望符号中的随机变量有 $\max\limits_{0\le t<T} S_t$ 这项，回忆我们为它起的名字：“路径依赖”性质。这让我们很难再去如 B-S 原始模型的求解过程一般构造一个无风险资产，可以说它是我们给“回望期权”定价的根本困难来源。

既然我们要解决原始模型解决不了的问题，就被迫地将模型向更加深入和复杂的方向改进。MEM 模型在 B-S 模型的基础上对股票价格的运动方程做了修改：加入了一项个数服从泊松过程的“跳跃点”。事实上，它可处理的情况要比文中举出的例子更加广泛，可以总结为：将原模型的解析可处理性推广到可处理有任意阶跳跃且跳跃大小具有混合指数分布的价格运动情形。

但这一改进也有代价，除了复杂的推导，另一点就是破坏了原模型的可求解性，我们可得的结果从“期权定价公式”变为了“期权定价方程”(事实上根据 B-S 模型的 B-S 偏微分方程可以求解得到具体的定价方程)。不过既然可以得到想要的数字，华尔街的券商们似乎并不会在意这种“细节”。

补充说明：MEM 模型并不是唯一一个也不是第一个开始研究奇异期权定价的模型。单是对于“回望期权”的定价就已经有了很多研究，其中一些模型是基于 B-S 模型的，另一些则独辟蹊径。但是大体上来说，这些模型都面临着简便性和准确性的权衡取舍，比较有实用价值的都会使用到数值计算的方法，而那些有解析解的模型大多不够准确。

6.3 用事实说话：现实应用中的精确程度分析

要将我们的模型应用到实际的期权定价中，我们无法避开的问题是结果的精确程度。首先说明：由于应用情景的不同，这里不再将二叉树模型与 B-S 模型进行对比，而只来说明 MEM 模型在 B-S 模型基础上的改进带来的精度优势。那么下面，我们就来看看它们在现实中是如何被应用的。

对于原始的 B-S 模型，我们之前的推导只得到了一个偏微分方程，显然它是不能直接被用来进行期权定价的。但只需应用一些 PDE 求解的知识，我们就能将 B-S 模型再进一步，得到同样著名的“B-S 期权定价公式”：

$$C_t = g(t, S_t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{41}$$

其中 $N(\cdot)$ 表示标准正态分布的分布函数，而 d_1 和 d_2 分别如下定义：

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \tag{42}$$

它的推导过程我们放在了附录中。其中各个参数的实际含义都是明确的，唯独除了 σ。事实上，σ 的现实意义意义是股票价格波动的标准差，在金融学上称之为“波动率”。但是很显然地我们不可能预估到未来股票价格的波动率，正如我们不可能预测股票的价格一样，否则“我干脆辞掉工作买大彩”。通常的做法是，根据过去一段时间的股票价格波动情况并综合考虑宏观经济背景得到一个波动率的平均程度 (也将它作为未来的预测值)。

那么 MEM 模型又是怎么应用到具体的定价问题中的呢？首先一个问题便是参数的选择：在 MEM 模型中，我们引入了多个待定的参数，一方面来讲它们丰富了模型，也使得模型具有更大的可调整空间，但从另一方面来说，参数的选择也给我们带来了困扰。

根据 Ning Cai, S. G. Kou 在 2011 年发表的论文 Option Pricing Under a Mixed-Exponential Jump Diffusion Model[1], MEM 选择参数的具体过程是这样的：我们首先选取一些股票期权纳入我们的考虑范围，通过观察得到这些期权在过去某个时刻的真实价格。用一组待定的参数 $\pi = (\sigma, \lambda, \eta_1, \cdots, \eta_m, \theta_1, \cdots, \theta_n, p_1, \cdots, p_m, q_1, \cdots, q_n)$

来最小化一个目标函数，这个目标函数是 Cont 和 Tankov 在 2004 提出的，具体形式为:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{(C_i(\pi) - \hat{C}_i(\pi))^2}{Vega^2(IV_i)} \tag{43}$$

这里面 N 代表我们考虑的全部股票期权的个数，$C(\pi)$ 和 $\hat{C}(\pi)$ 分别代表模型在 π 下的预测值和真实值，而 $Vega(IV_i)$ 是一个具有金融学含义的值，称为期权隐含波动率的 $Vega$ 值。

在现实应用中，通常是选取一个向上跳跃和两个向下跳跃，即选取 $m = 1$ 和 $n = 2$，再借助计算机得到最优的参数组合。然后，再使用之前的方法得到模型需要的最后一个参数：波动率 σ。

在选定参数之后，我们需要做一种名为“欧拉双侧反演法 (Euler two-side inversion)”的数值方法，这种数值方法的具体步骤请参照 [1]。

既然介绍过了这两者在现实中的具体应用方法，下面我们就来讨论二者精确程度的差异。

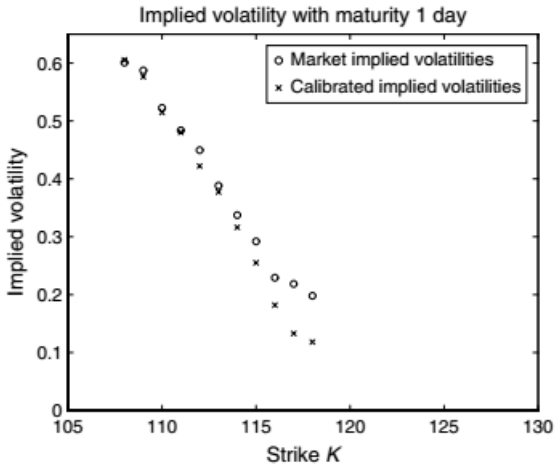
首先，直接从 B-S 模型的定价公式我们就可以发现它的一个特点，也可以说是这个定价理论存在的一个问题：由于正态分布的连续性，公式计算所得的期权价格是时间连续的！这与现实中的资产价格变动的特点有很大差别，要知道现实中的资产价格经常会有“跳跃”的变动，这也是引入 MEM 模型的一个原因。

其次，MEM 的跳跃项引入不是完全凭借主观的，它的跳跃尺度是作为变量进行拟合的最优化结果 (至于用来控制最优化的目标函数是否合理则不在本文讨论的范围内)。这相比于原始 B-S 模型“一锅端”的做法显然已经是一种进步了。

为了使我们的论述更加具体，下面就来说明二者之差异——“跳跃”的重要意义所在。虽然 B-S 模型是建立在时间连续的模型假设上，但在具体应用中还是难以处理一些期限极短的期权 (一天或以内)。这并非交易频率的问题，而是由于在过短的时间内，股价非连续性的变动会对模型假设的根基产生巨大冲击——甚至导数都不复存在了。或许在一个月或以上的时间内，从整体上来看股价的变动可以被近似地刻画为连续甚至光滑的，但对于一天以内的情况，一旦股票价格被某些因素影响而产生断崖式的波动 (即使幅度不大) 也会造成不可预估的偏差。

一般来说，这种期限很短的期权价格是很难被拟合的，但似乎 MEM 模型给出了一个相对满意的答案，即使对于剧烈的波动率偏斜也能产生紧密的拟合。

我们参考 [1] 中的一个实际算例，直观感受一下拟合的结果。在这个例子中，从 Morningstar Inc. 获得的数据集包括 2010 年 3 月 29 日的 47 个 SPY（标准普尔 500 ETF 股票）欧洲看涨期权的收盘价（即买入价和卖出价的平均值），对每个行权价的期权我们都构建 MEM 模型并采用最小化 (43) 的方法选择其适用的各参数，最终绘制出的图像如下 **(注：图源参考文献 [1])**:



做一点说明：图中的纵轴为“隐含波动率”，一个与期权价格等价的量，它的定义为将一个期权价格代入 B-S 定价方程反解出来的 σ 值。其中空心圈为实际值，X 形标记为 MEM 模型的拟合值。

[总结] 对 B-S 模型和 MEM 模型的对比做一个简短的总结：离散模型和连续模型的适用范围与交易频率有关。其离散者如二叉树模型；连续者如 B-S 模型，而 MEM 模型是对于 B-S 模型加入“跳跃”后的改进版本，后者的优势在于可以处理一些奇异期权，以及提高了现实应用中的精确程度，尤其是对于期限很短的期权定价。

附录 A　首次通过时间指数幂期望算法的证明

我们首先引入随机过程 $\{X_t\}$ 的无穷小生成元：

$$(Lu)(x)=\frac{\sigma^2}{2}u''(x)+\mu u'(x)+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}(u(x+y)-u(x))f_Y(y)dy. \tag{44}$$

其中 $u(x)$ 为任意二阶连续可微函数，而 $f_Y(\cdot)$ 则由 (16) 给出。

在正式的证明之前，我们需要先给出两个分析引理。

1.1　引理 1：$G(x)=\alpha$ 的根

引理 1：对于充分大的 $\alpha>0$，方程 $G(x)=\alpha$ 恰有 $m+n+2$ 个不同实根。进一步地，该方程有 $m+1$ 个正实根 $\beta_{1,\alpha},\beta_{2,\alpha},...,\beta_{m+1,\alpha}$ 和 $n+1$ 个负实根 $\gamma_{1,\alpha},\gamma_{2,\alpha},...,\gamma_{n+1,\alpha}$，满足：$-\infty<\gamma_{n+1,\alpha}<...<\gamma_{2,\alpha}<\gamma_{1,\alpha}<0<\beta_{1,\alpha}<\beta_{2,\alpha}<...<\beta_{m+1,\alpha}<+\infty$。这里的 $G(\cdot)$ 的定义见 (21).

证明：注意到，对 $i=1,2,...,m$，均有 $G(\eta_i-0),G(\eta_i+0)$ 中恰有一个为 $+\infty$，一个为 $-\infty$。故我们可以取正数 δ 使得 $\{(\eta_i-\delta,\eta_i+\delta)\}_{i=1}^m$ 为 $(0,+\infty)$ 的不交子区间族。

我们取 $\alpha_1=\max\limits_{1\le i\le m}\{f(\eta_i-\delta),f(\eta_i+\delta)\}$。则当 $\alpha>\alpha_1$ 时，根据连续函数的介值性，$G(x)=\alpha$ 在 $(\eta_i-\delta,\eta_i+\delta)-\{\eta_i\}$ 上至少有一个实根 $(i=1,2,...,m)$。

又由于 $G(+\infty)=+\infty$，故由 $G(\eta_m+\delta)\le\alpha_1<\alpha$ 可得 $G(x)=\alpha$ 在 $(\eta_m+\delta,+\infty)$ 上至少有一个实根。从而 $G(x)=\alpha$ 有至少 $m+1$ 个不等正实根。

同理可得，存在 $\alpha_2>0$，当 $\alpha>\alpha_2$ 时，$G(x)=\alpha$ 有至少 $n+1$ 个不等负实根。从而当 α 充分大时，$G(x)=\alpha$ 有至少 $m+n+2$ 个不等实根。但事实上，将这个方程去分母等价变形可知，这个方程的所有根都是一个不超过 $m+n+2$ 次多项式的零点，从而在 α 充分大时，这个方程恰有 $m+n+2$ 个不等实根，且其中有 $m+1$ 个正实根和 $n+1$ 个负实根。此即所证。

1.2　引理 2：一个 OIDE 的求解

引理 2：我们考虑如下 OIDE：

$$\begin{cases}(Lu)(x)-\alpha u(x)=\dfrac{\sigma^2}{2}u''(x)+\mu u'(x)-(\lambda+\alpha)u(x)+\lambda\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}u(x+y)f_Y(y)dy=0, & \text{if}\quad x<x_0.\\ u(x)=g(x), & \text{if}\quad x\ge x_0.\end{cases} \tag{45}$$

其中 $\alpha>0$ 充分大使得方程 $G(x)=\alpha$ 恰有 $m+n+2$ 个不同实根（实根记号与引理 1 相同）。x_0 为给定实数，$g(x)$ 为某个给定的函数。则这个方程的解一定是某个 $m+n+2$ 阶常系数齐次线性常微分方程的解，其特征方程为 $(G(x)-\alpha)\prod\limits_{i=1}^{m}(x-\eta_i)\prod\limits_{j=1}^{n}(x+\theta_j)=0$。进而，存在实数 $c_1,c_2,...,c_{m+1},d_1,d_2,...,d_{n+1}$ 使得该 OIDE 的解为

$$u(x)=\sum_{i=1}^{m+1}c_ie^{\beta_{i,\alpha}x}+\sum_{j=1}^{n+1}d_je^{\gamma_{j,\alpha}x}. \tag{46}$$

证明：对第一个方程两边求 k 次导数 $(0\le k\le m+n)$ 可得：

$$\frac{\sigma^2}{2}u^{(k+2)}(x)+\mu u^{(k+1)}(x)-(\lambda+\alpha)u^{(k)}(x)+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}u^{(k)}(x+y)f_Y(y)dy=0 \tag{47}$$

令

$$A_i(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x+y)e^{-\eta_iy}I_{\{y\ge0\}}dy,\quad 1\le i\le m. \tag{48}$$

$$B_j(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x+y)e^{-\theta_jy}I_{\{y<0\}}dy,while\quad 1\le j\le n. \tag{49}$$

从而我们得到，对任意 $0\le k\le m+n$，我们有：

$$\frac{\sigma^2}{2}u^{(k+2)}(x)+\mu u^{(k+1)}(x)-(\lambda+\alpha)u^{(k)}(x)+\lambda(p_u\sum_{i=1}^{m}p_l\eta_lA_i^{(k)}(x)+q_d\sum_{j=1}^{n}q_l\theta_lB_j^{(k)}(x))=0. \tag{50}$$

我们记：

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{m}(x-\eta_i)\prod_{j=1}^{n}(x+\theta_j)=\sum_{i=0}^{m+n}a_i x^i.\\
&\prod_{k\neq i}(x-\eta_k)\prod_{j=1}^{n}(x+\theta_j)=\sum_{k=0}^{m+n-1}a_k^{(i)}x^k.\quad i=1,2,...,m.\\
&\prod_{i=1}^{m}(x-\eta_i)\prod_{l\neq j}(x+\theta_l)=\sum_{l=0}^{m+n-1}b_l^{(j)}x^l.\quad j=1,2,...,n.
\end{aligned}\tag{51}$$

那么，对于 $i=1,2,...,m$，由分部积分可得：

$$\begin{aligned}
A_i'(x)-\eta_i A_i(x)&=\int_0^{+\infty}u'(x+y)e^{-\eta_i y}dy-\eta_i\int_0^{+\infty}u(x+y)e^{-\eta_i y}dy\\
&=-u(x)+\eta_i\int_0^{+\infty}u(x+y)e^{-\eta_i y}dy-\eta_i\int_0^{+\infty}u(x+y)e^{-\eta_i y}dy\\
&=-u(x)
\end{aligned}\tag{52}$$

从而，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m+n}a_k A_i^{(k)}(x)&=\sum_{k=0}^{m+n-1}a_k^{(i)}(A_i^{(k+1)}(x)-\eta_i A_i^{(k)}(x))\\
&=\sum_{k=0}^{m+n-1}a_k^{(i)}(A_i'(x)-\eta_i A_i(x))^{(k)}\\
&=-\sum_{k=0}^{m+n-1}a_k^{(i)}u^{(k)}(x).
\end{aligned}\tag{53}$$

同理，我们有

$$\sum_{k=0}^{m+n}a_k B_j^{(k)}(x)=\sum_{k=0}^{m+n-1}b_k^{(j)}u^{(k)}(x).\quad j=1,2,...,n.\tag{54}$$

故将 (50) 的第 k 个式子乘 a_k 累加，可得

$$\sum_{k=0}^{m+n}(a_k(\frac{\sigma^2}{2}u^{(k+2)}(x)+\mu u^{(k+1)}(x)-(\lambda+\alpha)u^{(k)}(x)))+\lambda(-p_u\sum_{i=1}^{m}p_l\eta_l\sum_{k=0}^{m+n-1}a_k^{(i)}u^{(k)}(x)+q_d\sum_{j=1}^{n}q_l\theta_l\sum_{k=0}^{m+n-1}b_k^{(j)}u^{(k)}(x))=0.\tag{55}$$

这是一个不超过 $m+n+2$ 阶常系数齐次线性常微分方程，$u^{(m+n+2)}(x)$ 的系数为 $\frac{\sigma^2}{2}a_{m+n}=\frac{\sigma^2}{2}\neq 0$，从而我们得到一个 $u(x)$ 满足的 $m+n+2$ 阶常系数齐次线性常微分方程。其特征方程为：

$$\sum_{k=0}^{m+n}(a_k(\frac{\sigma^2}{2}x^{k+2}+\mu x^{k+1}-(\lambda+\alpha)x^k))+\lambda(-p_u\sum_{i=1}^{m}p_l\eta_l\sum_{k=0}^{m+n-1}a_k^{(i)}x^k+q_d\sum_{j=1}^{n}q_l\sum_{k=0}^{m+n-1}b_k^{(j)}x^k)=0.\tag{56}$$

由这些系数的定义，我们可以将左边整理为：

$$\begin{aligned}
LHS&=(\frac{\sigma^2}{2}x^2+\mu x-(\lambda+\alpha))\sum_{k=0}^{m+n}a_k x^k+\lambda(-p_u\sum_{i=1}^{m}p_l\eta_l\sum_{k=0}^{m+n-1}a_k^{(i)}x^k+q_d\sum_{j=1}^{n}q_l\theta_l\sum_{k=0}^{m+n-1}b_k^{(j)}x^k)\\
&=(\frac{\sigma^2}{2}x^2+\mu x-(\lambda+\alpha)+\lambda(p_u\sum_{i=1}^{m}\frac{p_i\eta_i}{\eta_i-x}+q_d\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j\theta_j}{\theta_j+x}))\prod_{i=1}^{m}(x-\eta_i)\prod_{j=1}^{n}(x+\theta_j)\\
&=\prod_{i=1}^{m}(x-\eta_i)\prod_{j=1}^{n}(x+\theta_j)(G(x)-\alpha)
\end{aligned}\tag{57}$$

从而由常系数齐次线性常微分方程的解法可得引理 2 成立，证毕。

1.3 该计算方法的证明

事实上，我们可以证明以下更强的结果：对于能够使得引理 1 结论成立的 $\alpha>0$ 及 $x,b\in\mathbb{R}$，我们有：

$$E^x[e^{-\alpha\tau_b}]=\begin{cases}1, & \text{if}\quad x\geq b,\\ \sum_{i=1}^{m}d_i e^{\beta_{i,\alpha}x}, & \text{if}\quad x<b.\end{cases}\tag{58}$$

其中 $x=X_0$,$\mathbf{d}=(d_1,d_2,...,d_{m+1})$, $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 的定义见 (30)。

在这个结论中，令 $x=0<b$，我们就得到了正文中所提到的计算方法。下面我们将证明分为三步。

(1) 验证矩阵 **A** 是非退化的。

(2) 在引理 2 中的 OIDE 里取 $x_0 = b, g(x) = 1$，我们证明存在唯一的函数 $u(x)$ 是这个 OIDE 满足以下两个条件的解：(i) 光滑性，即 $u(b-0) = u(b+0)$；(ii) 有界边界条件，即 $u(x)$ 在 $x \to -\infty$ 时有界。进一步地，$u(x)$ 表达式如下：

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad x \geq b, \\ \sum_{i=1}^{m} d_i e^{\beta_{i,\alpha} x}, & \text{if} \quad x < b. \end{cases} \tag{59}$$

(3) 证明 (2) 中的函数就是 $E^x[e^{-\alpha\tau_b}]$.

先证明 (1), 用反证法, 假设这个矩阵是退化的, 则其行向量组线性相关, 从而存在不全为 0 的常数 $k_0, k_1, ..., k_m$ 使得

$$k_0 + \sum_{i=1}^{m} k_i \frac{\eta_i}{\eta_i - \beta_{l,\alpha}} = 0, \quad l = 1, 2, ..., m+1. \tag{60}$$

令 $f(\beta) = k_0 + \sum_{i=1}^{m} k_i \frac{\eta_i}{\eta_i - \beta}$，则我们找到了 $f(\beta)$ 的 $m+1$ 个不同零点。但 $f(\beta)\prod_{i=1}^{m}(\eta_i - \beta)$ 是一个不超过 m 次的非零多项式，故 $f(\beta)$ 至多只有 m 个零点，从而得到矛盾。故 (1) 成立，矩阵 **A** 非退化。

我们再证明 (2)。首先使用引理 2 可知, 若 $u(x)$ 为 (2) 所提到的 OIDE 的解, 则存在待定常数 $c_1, ..., c_{n+1}, d_1, ..., d_m$ 使得

$$u(x) = \sum_{i=1}^{m+1} d_i e^{\beta_{i,\alpha} x} + \sum_{j=1}^{n+1} c_j e^{\gamma_{j,\alpha} x}. \tag{61}$$

由有界性条件可得 $c_1 = c_2 = ... = c_{n+1} = 0$。再由连续性条件可得

$$d_1 e^{\beta_{1,\alpha}} + ... + d_{m+1} e^{\beta_{m+1,\alpha}} = 0. \tag{62}$$

又注意到，**d** 能够使得 $u(x)$ 满足原 OIDE 当且仅当

$$\frac{\sigma^2}{2} u''(x) + \mu u'(x) - (\lambda + \alpha) u(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} u(x+y) f_Y(y) dy = 0. \quad \forall x < b. \tag{63}$$

将 $u(x)$ 的表达式代入，经过计算和整理，得上面这个方程等价于：

$$\sum_{l=1}^{m+1} d_l e^{\beta_{l,\alpha} x} (G(\beta_{l,\alpha}) - \alpha) - \lambda p_u \sum_{i=1}^{m} \{p_i e^{\eta_i (x-b)} [\sum_{l=1}^{m+1} (d_l \frac{\eta_i e^{\beta_{l,\alpha} b}}{\eta_i - \beta_{l,\alpha}}) - 1]\} = 0. \quad \forall x < b. \tag{64}$$

即

$$\sum_{i=1}^{m} \{p_i e^{\eta_i (x-b)} [\sum_{l=1}^{m+1} (d_l \frac{\eta_i e^{\beta_{l,\alpha} b}}{\eta_i - \beta_{l,\alpha}}) - 1]\} = 0. \quad \forall x < b. \tag{65}$$

由 x 的任意性及 η_i 互不相同可得

$$\sum_{l=1}^{m+1} (d_l \frac{\eta_i e^{\beta_{l,\alpha} b}}{\eta_i - \beta_{l,\alpha}}) = 1, \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{66}$$

由 (62) 和 (66) 即可得到 **d** 所需要满足的充要条件，对比原命题即得 (2) 成立。

现在我们开始证明 (3)，即 (2) 中所定义的 $u(x)$ 就是 $E^x[e^{-\alpha\tau_b}]$。

首先，由 (2) 可得

$$-\alpha u(x) + (Lu)(x) = 0, \quad x < b. \tag{67}$$

由于 $u(x)$ 未必连续可微，我们不能直接对随机过程 $\{e^{-\alpha t} X_t\}$ 使用伊藤公式。但我们可以构造一列足够光滑的函数 $\{u_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 来逼近 $u(x)$。更准确地说，我们可以构造一列函数 $\{u_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 满足：(1)$\forall x, u_n(x) \to u(x) (n \to +\infty)$，(2)$\forall n, u_n(x)$ 二阶连续可微，(3)$\forall n, u_n(x) = u(x), \forall x \leq b$ or $x \geq b + \frac{1}{n}$，(4)$\forall n, \forall x \in (b, b + \frac{1}{n}), 0 \leq u_n(x) \leq M_1$, 其中 M_1 是一个正常数。此外，$\forall x \leq b, n \in \mathbb{N}, |u_n(x)| = |u(x)| \leq M_2$，其中 $M_2 = \sum_{l=1}^{m} |d_l| e^{\beta_{l,\alpha} b}$.

经过一些计算可得，当 $x < b$ 时，有：

$$(Lu_n)(x) - \alpha u(x) = (L(u_n - u))(x) = \lambda \int_{b-x}^{b-x+\frac{1}{n}} (u_n(x+y) - u(x+y)) f_Y(y) dy. \tag{68}$$

注意到，由构造过程可得：

$$|u_n(x) - u(x)| \leq \max_{b \leq x \leq b + \frac{1}{n}} |u_n(x)| + 1 \leq M_1 + 1 := M, \forall x, n. \tag{69}$$

故

$$
\begin{aligned}
|(Lu_n)(x)-\alpha u_n(x)| &\le \lambda p_u \sum_{i=1}^{m} |p_i|\eta_i \int_{b-x}^{b-x+\frac{1}{n}} |u_n(x+y)-u(x+y)|dy \\
&\le \frac{\lambda p_u \sum_{i=1}^{m} |p_i|\eta_i M}{n} \to 0 (n \to +\infty), \forall x < b.
\end{aligned} \tag{70}
$$

且这个收敛过程对 x 是一致的。

对任意 $n = 1, 2, ...,$ 对跳过程 $\{e^{-\alpha t} u_n X_t : t \ge 0\}$ 使用伊藤公式, 我们得到了一列局部鞅 $\{M_t^{(n)} : t \ge 0\}$, 其定义如下:

$$
M_t^{(n)} := e^{-\alpha(t\wedge\tau_b)} u_n(X_{t\wedge\tau_b}) - \int_0^{t\wedge\tau_b} e^{-\alpha s}[-\alpha u_n(X_s) + (Lu_n)(X_s)]ds \tag{71}
$$

注意到对任意 $t \ge 0$ 及正整数 n，有:

$$
\begin{aligned}
|u_n(X_{t\wedge\tau_b})| &= |u_n(X_{t\wedge\tau_b}) I_{\{t<\tau_b\}} + u_n(X_{t\wedge\tau_b}) I_{\{t\ge\tau_b, X_{\tau_b} < b+\frac{1}{n}\}} + u_n(X_{t\wedge\tau_b}) I_{\{t\ge\tau_b, X_{\tau_b}\ge b+\frac{1}{n}\}}| \\
&\le \max(M_2, M_1, 1)
\end{aligned} \tag{72}
$$

事实上，由构造过程和 (69) 可得这个不等式成立。因此对任意 $t \ge 0$ 及正整数 n，有

$$
\begin{aligned}
|M_t^{(n)}| &\le |u_n(X_{t\wedge\tau_b})| + \int_0^{t\wedge\tau_b} e^{-\alpha s}| - \alpha u_n(X_s) + (Lu_n)(X_s)|ds \\
&\le \max(M_2, M_1, 1) + \frac{\lambda p_u \sum_{i=1}^{m} |p_i|\eta_i M}{n} t.
\end{aligned} \tag{73}
$$

故

$$
\sup_{0\le s\le t} |M_s^{(n)}| \le \max(M_2, M_1, 1) + \frac{\lambda p_u \sum_{i=1}^{m} |p_i|\eta_i M}{n} t. \tag{74}
$$

从而对任意的正整数 n，$\{M_t^{(n)} : t \ge 0\}$ 是鞅。因此我们有:

$$
E^x M_t^{(n)} = E^x M_0^{(n)} = u_n(X_0) = u_n(x) = u(x), \quad x < b, t \ge 0, n \in \mathbb{N}. \tag{75}
$$

即

$$
u(x) = E^x[e^{-\alpha(t\wedge\tau_b)} u_n(X_{t\wedge\tau_b})] - E^x[\int_0^{t\wedge\tau_b} e^{-\alpha s}[-\alpha u_n(X_s) + (Lu_n)(X_s)]ds]. \tag{76}
$$

利用有界收敛定理（由构造过程可得 u_n 是一致有界的）可得，当 $n \to +\infty$，上式右边的第一项收敛于 $E^x[e^{-\alpha(t\wedge\tau_b)} u(X_{t\wedge\tau_b})]$. 而利用 (70) 中所证的一致收敛可得上式右边第二项在 $n \to +\infty$ 时收敛于 0. 从而对任意 $t \ge 0, x < b$，我们有:

$$
\begin{aligned}
u(x) &= E^x[e^{-\alpha(t\wedge\tau_b)} u(X_{t\wedge\tau_b})] \\
&= E^x[e^{-\alpha\tau_b} u(X_{\tau_b}) I_{\{\tau_b\le t\}}] + E^x[e^{-\alpha t} u(X_t) I_{\{\tau_b > t\}}] \\
&= E^x[e^{-\alpha\tau_b} I_{\{\tau_b\le t\}}] + E^x[e^{-\alpha t} u(X_t) I_{\{\tau_b > t\}}]
\end{aligned} \tag{77}
$$

令 $t \to +\infty$，由单调收敛定理可得，上式右边第一项收敛于 $E^x[e^{-\alpha\tau_b}]$，而由有界收敛定理可得上式右边第二项收敛于 0，从而我们得到

$$
u(x) = E^x[e^{-\alpha\tau_b}], \quad x < b. \tag{78}
$$

此外，我们注意到，当 $x = X_0 \ge b$，我们有 $\tau_b = 0$，从而 $E^x[e^{-\alpha\tau_b}] = 1 = u(x)$。

故综合上述可得 (3) 成立，我们终于完成了对这个计算方法的严格证明。

附录 B　期权定价的 Black-Scholes 公式

在这一部分中，我们的目的是证明：对任意 $0 \le t \le T, S \ge 0$，满足 Black-Scholes 方程（见 (14)）及条件 $(*)$ 的函数 $g(t,S)$，我们有如下的 Black-Scholes 公式

$$g(t,S) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2). \tag{79}$$

其中，$N(\cdot)$ 为标准正态分布的分布函数，d_1, d_2 定义如下：

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \tag{80}$$

为了简化记号起见，我们记 $r = r_f$。条件 $(*)$ 为

$$g(T,S) = \max\{0, S-K\}, \forall S \ge 0. \tag{81}$$

我们首先做自变量代换 $x = \ln S, y = T - t$，则我们将 g 满足的条件变形为如下的初值问题：

$$\frac{\partial g}{\partial y} - (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + rg = 0. \tag{82}$$

$$g|_{y=0} = \max\{0, e^x - K\}. \tag{83}$$

取常数

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}, \quad \beta = -r + (r - \frac{\sigma^2}{2})\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\alpha^2 = -r - \frac{1}{2\sigma^2}(r - \frac{\sigma^2}{2})^2. \tag{84}$$

令

$$g(x,y) = e^{\alpha x + \beta y}u(x,y). \tag{85}$$

代入原方程，计算整理可得

$$u_y - \frac{\sigma^2}{2}u_{xx} = 0. \tag{86}$$

相应的初值条件变为

$$u|_{y=0} = e^{-\alpha x}\max\{0, e^x - K\}. \tag{87}$$

这个方程的基本解为 $X(x,y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 y}}$，从而我们得到 u 所满足的初值问题的解为：

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(x-\xi, y)e^{-\alpha\xi}\max\{0, e^\xi - K\}d\xi = \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2 y}}e^{-\alpha\xi}(e^\xi - K)d\xi. \tag{88}$$

进一步地，我们得到

$$g(x,y) = e^{\alpha x + \beta y}\int_{\ln K}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2 y}}e^{-\alpha\xi}(e^\xi - K)d\xi. \tag{89}$$

代入 α, β 的取值整理计算可得：

$$g(x,y) = e^{-ry}\int_{\ln K}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}}\exp[-\frac{1}{2\sigma^2 y}(\xi - x + (\frac{\sigma^2}{2} - r)y)^2](e^\xi - K)d\xi. \tag{90}$$

令 $\xi = \sigma\sqrt{y}\eta + x - (\frac{\sigma^2}{2} - r)y$，则积分下限变换为 $\frac{\ln K - x + (\frac{\sigma^2}{2} - r)y}{\sigma\sqrt{y}}$，将 x, y 换回 S, t 便知这个下限即为 $-d_2$，从而我们可以继续化简：

$$\begin{aligned} g(x,y) &= e^{-ry}\int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\eta^2}(e^{\sigma\sqrt{y}\eta + x - (\frac{\sigma^2}{2} - r)y} - K)d\eta \\ &= e^x\int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\eta - \sigma\sqrt{y})^2}d\eta - Ke^{-ry}\int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\eta^2}d\eta \\ &= e^x N(d_2 + \sigma\sqrt{y}) - Ke^{-ry}N(d_2) \end{aligned} \tag{91}$$

在上式中，我们再将 $x = \ln S, y = T - t$ 代入，结合 d_1, d_2 的定义即可得到我们所需要证明的 Black-Scholes 公式。证毕。

参考文献

[1] Ning Cai and Steven G Kou. Option pricing under a mixed-exponential jump diffusion model. Management Science, 57(11):2067–2081, 2011.

[2] James Chen. Barrier option. https://www.investopedia.com/terms/b/barrieroption.asp, May 21,2021.

[3] Antoine Conze. Path dependent options: The case of lookback options. The Journal of Finance, 46(5):1893–1907, 1991.

[4] John C Cox, Stephen A Ross, and Mark Rubinstein. Option pricing: A simplified approach. Journal of financial Economics, 7(3):229–263, 1979.

[5] Steven Kou, Giovanni Petrella, and Hui Wang. Pricing path-dependent options with jump risk via laplace transforms. The Kyoto Economic Review, 74(1):1–23, 2005.

[6] Philip Protter. Stochastic Integration and Differential Equations: A New Approach. Springer Berlin / Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013.

[7] Myron Scholes. The pricing of options and corporate. The journal of political economy, 81(3):637–654, 1973.