数学模型 Lecture Notes

Zhennan Zhou

2022 年 3 月 28 日

PRELIMINARY DRAFT. NOT FOR WIDE CIRCULATION.

参考：教材二第2章。

拓展：教材三第12章。(拓展材料不属于作业、考试范围。)

3 微分方程模型选讲：输运/运输/运动

To every action there is always opposed an equal reaction.

——Isaac Newton

从某种意义上说，微分方程在17世纪80年代已经出现在微积分创立者的著作中了。*微分方程*一词首次出现在 Leibniz 给 Newton 在1676年写的信中，并在1684年后被用于他的著作中。牛顿的《自然哲学的数学原理》中包含了很多微分方程，这些方程用于构造并集成于初等几何框架中。从那时起，基本的自然规律和技术问题在严格数学模型下的公式频繁地甚至很普遍地，以微分方式给出。

本章中，我们主要研究运动现象。

3.1 Eulerian 描述和 Lagrangian描述

我们对很多系统的研究，除了关心整个系统随时间演化的过程，也会对随着空间发生变化的性质感兴趣。在第一章中，我们了解到，对于整个群体的演化过程，我们可以用基于个体的模型，也可以用“连续介质模型”（比如，空间的质量密度函数，相空间的概率密度函数等）。为了方便讨论，这一章中，我们都只在时空区域内讨论，而不考虑动量坐标或者其他广义坐标了。

连续性理论导出的方程反映了在时间上的微小区间和空间上的微小区域平均后的性质。我们隐性地做了如下的连续性假设：

合理平均后的个体（微观）的行为可以被 **局部的群体（宏观）的行为** 预测。

我们下面建立一般的连续性模型，描述密度函数 $f(\boldsymbol{x},t)$ 随时间演化的偏微分方程模型，它刻画了在给定时间和空间之后，群体的某种特征或状态。如果我们对空间坐标在区域 Ω 积分，那么

$$\mathscr{F}(t)=\int_{\Omega} f(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}$$

描述的就是这个群体在区域 Ω 内的累计特性随时间变化。我们之前接触的质量密度函数就是一个例子。但是密度函数也可以指其他的状态，比如温度、动量、能量，等等。我们注意，这个推广的密度函数可以是标量，也可以是向量。例如，如果 $\boldsymbol{j}(,t)$ 是动量密度函数，那么

$$\mathscr{P}(t)=\int_{\Omega} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}$$

表示区域 Ω 内的物质的总动量，它是一个向量。本章中，另外一些状态变量也是时空坐标的函数，但是更适合把他们理解成一种平均性质。例如，一种连续介质（例如水、空气、弹性材料等）的速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$，可以理解成该物质在时间 t，位置 $\boldsymbol{x}$ 的平均速度。

本章中，我们将换个角度重温守恒律，通量函数、源函数等概念，也将学习一些解的技巧。

由于我们关心的状态变量的时间演化与物质的运动有关，我们需要对运动有更全面的描述。我们首先考虑所谓的**被动运输**，

- 被动运输：单个粒子按照外加的速度场运动，而自己的存在不会影响流向。

我们设，这个外加的速度场为 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$，它给出了一个粒子在时间 t 空间 $\boldsymbol{x}$ 的情况下，运动的速度大小和方向。这种对某个状态（这里指速度场）在固定坐标系下的表示，称为**欧拉描述（Eulerian Description）**。显然，粒子的运动满足如下的初值问题

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{X},t), \quad \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{X}_0. \tag{3.1}$$

这样的初值问题也被称为粒子的轨（迹）线问题。

另外一种角度是，如果先确定了粒子的初始位置 $\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{X}_0$，那么对整个速度场的欧拉描述就变得不再必要，而我们只需要知道粒子轨线上的速度。所谓的**拉格朗日描述（Lagrangian Description）**给出了跟一个给定粒子的运动相关的状态，将这个状态描述为了一个时间的函数。例如，上个例子中，对于初始位置为 X_0 的粒子，它的拉格朗日速度为

$$\boldsymbol{V}(t;\boldsymbol{X}_0) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}(t;\boldsymbol{X}_0),t).$$

而粒子的轨（迹）线问题的拉格朗日描述为

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} = \boldsymbol{V}(t;\boldsymbol{X}_0), \quad \boldsymbol{X}(0;\boldsymbol{X}_0) = \boldsymbol{X}_0.$$

一般的，跟粒子相关的状态变量（比如质量密度、温度、动量等）也都有他们的欧拉描述 $f(\boldsymbol{x},t)$ 和相应的拉格朗日描述 $F(t) = F(t;\boldsymbol{X}_0)$，它们的关系为

$$F(t;\boldsymbol{X}_0) = f(\boldsymbol{X}(t;\boldsymbol{X}_0),t).$$

为了表述这个状态变量的时间演化，我们需要定义给定粒子时，这个状态的变化率，如果我们记

$$f_{\text{part}}(t) = F(t;\boldsymbol{X}_0) = f(\boldsymbol{X}(t;\boldsymbol{X}_0),t).$$

我们可以用 Eulerian 描述下的方程 f 来表示这个拉格朗日导数

$$\frac{df_{\text{part}}(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \frac{d\boldsymbol{X}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla f \equiv \frac{Df}{Dt}.$$

这个Eulerian形式的拉格朗日导数被称为 convective derivative 或者 material derivative （随体导数），我们记作 $\frac{Df}{Dt}$。

用现在 Eulerian 和 Lagrangian 的角度来看，在第一章中，我们推导守恒律模型时，是直接用的 Eulerian 的形式。

而很多时候，因为 Lagrangian 描述更加直观，所以我们可以**先用 Lagrangian 描述完成模型的推导，再把模型用 Eulerian 形式写出来**。

教材二用 Reynolds Transport Theorem 推导了守恒律模型就是一种典型的例子。讲义中，我们只考虑一维的例子，高维的情况请大家自己阅读教材。

为了用公式表达连续性模型，特别是为了推导状态变量 $f(\boldsymbol{x},t)$ 的变化率模型，我们考虑一个**“物质滴”（material blob）**，它在初始时刻占据了一个区间 D，比如，我们可以想象流体中的一个水滴。这个物质滴（以下都只称 blob）随着时间移动、变形，我们把 blob 的占据的区域用 $D(t)$ 表示。

一维的时候，这个区域就是一个跟时间有关的区间，$a(t)\le x\le b(t)$。那么这个状态变量在这个 blob 中的累积值可以表示为

$$f_{\text{blob}}(t)=\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx.$$

根据 Leibniz 公式，我们得到

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx=\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx+f(b,t)\frac{db}{dt}-f(a,t)\frac{da}{dt}.$$

利用例子运动的欧拉描述 (3.1)，我们可以推导出一维的 Reynolds Transport Theorem

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx=\int_{a(t)}^{b(t)}\left[\frac{\partial}{\partial t}f+\frac{\partial}{\partial x}(fv)\right]dx$$

我们需要强调的是，这里的状态变量 $f(x,t)$ 可以是跟微观粒子有关的任意宏观状态变量。为了推导具体的输运方程，我们需要结合特定状态变量的守恒原理。比如，考虑物质的密度函数 $\rho(x,t)$，那么它在一个 blob 上的累积值是这一个 blob 的质量

$$m_{\text{blob}}(t)=\int_{a(t)}^{b(t)}\rho(x,t)dx.$$

这时候，为了推导质量守恒方程，我们需要假设 blob 的时间演化满足质量守恒原理：质量不生不灭，或者说，每一个 blob 的质量不随时间发生变化。即有，

$$\frac{d}{dt}m_{\text{blob}}(t)=\int_{a(t)}^{b(t)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\rho+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)\right]dx=0.$$

再由 blob 的任意性，我们推出（教材二中使用了 *du Bois- Reymond Lemma*）一维空间的连续性方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)=0.$$

3.2 欧拉方程*

回顾一下，在第一章中，如果多维空间的密度函数为 $u(\boldsymbol{x},t)$，$x\in\mathbb{R}^m$，通量函数为 $\boldsymbol{J}(u)\in\mathbb{R}^m$，那么我们推出了

- Conservation law: $u_t+\nabla\cdot\boldsymbol{J}=u_t+\sum_{n=1}^{m}(J_n)_{x_n}=0.$

注意，这个版本中 u 仍为标量，或者说，只有一个状态变量。

事实上，我们可以进一步推广守恒律模型。考虑系统中有 d 个状态变量 $\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_d)^T\in\mathbb{R}^d$，每个状态标量都是时间 t 和空间 $x\in\mathbb{R}^m$ 的函数，于是

$$\boldsymbol{u}:\quad \mathbb{R}^{m+1}\to\mathbb{R}^d,\qquad \boldsymbol{J}_i\in\mathbb{R}^d,\quad i=1,\cdots,m.$$

此时，守恒律方程如下

$$\boldsymbol{u}_t+\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{J}_i)_{x_i}=0.$$

有时，我们令 $\boldsymbol{J}=(\boldsymbol{J}_1,\cdots,\boldsymbol{J}_m)\in\mathbb{R}^{d\times m}$，并把守恒律写成一个更紧凑的形式

$$\boldsymbol{u}_t+\nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{J}=0.$$

欧拉方程是最常研究的流体方程，是守恒律的一种特例，其状态变量和通量函数为

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}\rho\\ \boldsymbol{j}\\ E\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{j}^T\\ \frac{1}{\rho}\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j}+p\mathbf{I}\\ (E+p)\frac{1}{\rho}\boldsymbol{j}^T\end{pmatrix},$$

这里

- 自变量为时间 $t\in\mathbb{R}$, 空间 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$，其余都是状态变量.
- $\rho\in\mathbb{R}$ 是（质量）密度;
- $\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ 是动量（列向量），而 $\boldsymbol{v}$ 是速度;
- $p\in\mathbb{R}$ 是压强，$E\in\mathbb{R}$ 是能量密度，$\mathbf{I}$ 是单位矩阵;
- 欧拉系统需要补充一个状态方程来联系状态变量 $p=p(\rho,\boldsymbol{j},E)$.

另外，对于两个（列）向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 来说，$\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$ 表示向量的张量积。

我们回顾一下第一章守恒律的结果，如果 $\rho(\boldsymbol{x},t)$ （$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$）表示质量密度，$D\subset\mathbb{R}^3$ 是有界闭区域，那么区域内的质量为

$$m(t)=\int_D\rho(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}.$$

令 ∂D 表示区域的外侧，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 为单位外法向量。区域 D 内质量的变化只跟运动有关，那么质量密度的通量函数为 $\rho\boldsymbol{v}=\boldsymbol{j}$，则区域 D 内质量的变化满足

$$\frac{d}{dt}\int_D\rho(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}=-\int_{\partial D}\rho\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dS.$$

由高斯公式，我们得到

$$\int_D\left(\rho_t+\nabla\cdot\boldsymbol{j}\right)d\boldsymbol{x}=0.$$

再由区域 D 的任意性，我们推导了欧拉方程中的质量守恒方程。

类似的，考虑区域 D 内物质的总动量

$$\boldsymbol{P}(t)=\int_D\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x},$$

我们假设区域 D 内动量改变的原因有两个：一个是由于运动（物质的流入流出伴随着一些动量的增加和减少），一个是由于受力。为了简化讨论，我们只讨论压力对区域内物质的作用。注意，区域表面的受力会改变区域内物质的动量，但是区域内部的压力并不会。于是，我们有如下带运动的牛顿第二定律：

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{P}(t)=\frac{d}{dt}\int_D\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}=-\int_{\partial D}\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dS-\int_{\partial D}\boldsymbol{p}\mathbf{I}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dS.$$

最后，我们利用高斯公式，就得到了欧拉方程中的动量守恒方程

$$\boldsymbol{j}_t+\nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot\left(\frac{1}{\rho}\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j}+p\mathbf{I}\right)=0.$$

类似的，我们也可以得到能量守恒方程，但是模型的建立（通量函数的构造）需要对能量的输运做额外的物理假设，我们在本课中就不太讨论了。

事实上，不同的流体方程的建模重点就是给出一个流体相对应的通量函数（flux function），这需要反复的力学实验和数学修正。很多科学家、工程师终生的工作就是在流体模型的建立和修正上。

幸运的是，作为数学人，我们可以研究这类模型在抽象形式下的数学结构。不幸的是，这个模型的分析求解实在太难了！接下来，我们介绍一些这个模型的简化和改变。

简化的欧拉方程系统中，我们只考虑质量守恒和动量守恒方程而且，有时我们会进一步假设流体是不可压缩的, 即 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$。这样，质量守恒方程简化为

$$\rho_t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho=0.$$

请大家思考一下为什么这可以解读为“流体是不可压缩的”。

于是，我们得到不可压流体的欧拉方程

$$\begin{cases}\rho_t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho=0,\\ \boldsymbol{v}_t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}=-\frac{\nabla p}{\rho}.\\ \nabla\cdot\boldsymbol{v}=0.\end{cases}.$$

如果我们进一步假设，质量密度是个常数，不随空间时间发生变化，即 $\rho\equiv\rho_0$，那么我们得到

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}_t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}=-\frac{\nabla p}{\rho_0}.\\ \nabla\cdot\boldsymbol{v}=0.\end{cases}.$$

另外，我们可以通过加粘性项（扩散项）的方法从欧拉方程得到 Navier–Stokes 方程。比如，对于均匀质量密度，不可压的 Navier–Stokes 方程可以写成

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}_t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}=-\frac{\nabla p}{\rho_0}+\mu\Delta\boldsymbol{v}.\\ \nabla\cdot\boldsymbol{v}=0.\end{cases}.$$

这里，μ 是粘性系数。

为什么人们对流体方程感兴趣呢？这个答案也许太多了。我们这里只选择一个小的侧面去探究。考虑如下的一维的无粘 Burgers' equation

$$u_t+uu_x=0.$$

我们通过这里例子来研究一些（非线性）一阶双曲方程的解法。

3.3 一阶双曲方程的特征线法

我们只学习 **空间一维** 的双曲方程的特征线法。我们先考虑最简单的一类一阶双曲方程，一阶常系数的 advection equation

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+c\frac{\partial}{\partial x}\rho=0,\quad \rho(x,0)=P(x).$$

容易验证 (也回顾一下守恒律中的通量)，这个方程的解是将初值形状不变地按照速度 c 向右平移 (如果 $c>0$)，

$$\rho(x,t)=P(x-ct).$$

这种形状不变地按照一个固定的速度平移的解被称为“行波解”。教材二中在第2.3，2.4节对行波解有对“行波解”有一些扩充介绍，请大家自行阅读。我们也将在下一小节中再次讨论行波解。

下面我们考虑半线性（或准线性，semilinear）的一阶波方程

$$\frac{\partial}{\partial t}p+c(x,t)\frac{\partial}{\partial x}p=r(x,t,p),\quad p(x,0)=f(x).\tag{3.2}$$

这里，速度函数 $c(x,t)$ 跟空间位置和时间有关，但是跟方程的解本身无关。右端 $r(x,t,p)$ 称为变化率函数，或者反应率函数，它可能依赖于空间位置、时间和解本身。**这是一个 Eulerian 的 PDE 初值问题，但是可以转化成 Lagrangian 的 ODE 问题。**

对于每一个初值时刻的空间坐标 X_0，考虑特征线方程初值问题（即之前定义的轨迹问题），

$$\frac{dX}{dt} = c(X(t),t), \quad X(0;X_0) = X_0.$$

那么，波方程的解 $p(x,t)$ 的 Lagrangian 描述为

$$P(t,X_0) = p(X(t;X_0),t), \quad X(0;X_0) = X_0.$$

根据连锁法则，我们有

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}p + \frac{\partial}{\partial x}p\frac{dX}{dt}.$$

于是，我们得到，波方程 (3.2) 可以转化成 Lagrangian 变量的演化方程，即特征方程

$$\frac{dP}{dt} = r(X(t),t,P(t)), \quad \frac{dX}{dt} = c(X(t),t).$$

而这些方程的初值也跟原 Eulerian 变量做如下的匹配

$$P(0,X_0) = f(X_0), \quad X(0;X_0) = X_0.$$

这个 X 方程的轨线初值问题定义了 (x,t) 平面的一条曲线，这样的曲线被称为特征线，可以看作是一种广义的轨线。一旦 $X(t)$ 确定了，可以代入 P 的方程，并求解 $P(t)$。

这就是所谓的 **特征线法**，把 Eulerian PDE的初值问题转化成了一组 Lagrangian ODE 的初值问题。这些 Lagrangian 解（$X(t;X_0),P(t;X_0)$）依赖于初值位置 X_0，有时候，我们可以把 Lagrangian 解再转化为 Eulerian 的解 $p(x,t)$。

我们来演算一个例子。

$$\frac{\partial}{\partial t}p + 2x\frac{\partial}{\partial x}p = xp^2, \quad p(x,0) = 2+\sin(x).$$

这个初值问题对应的特征问题是

$$\frac{dX}{dt} = 2X, \quad X(0) = X_0, \tag{3.3}$$

$$\frac{dP}{dt} = XP^2, \quad P(0) = 2+\sin(X_0). \tag{3.4}$$

解 X 方程，我们容易得到 $X = X_0e^{2t}$，我们将它代入 P 的方程，就得到

$$\frac{dP}{dt} = X_0e^{2t}P^2.$$

结合初值求解 P 方程，我们得到

$$P(t;X_0) = \left(\frac{X_0}{2}(1-e^{2t}) + \frac{1}{2+\sin(X_0)}\right)^{-1}.$$

求出 Lagrangian 解之后，我们想把它转化成 Eulerian 解 $p(x,t)$。注意到，由 $X = X_0e^{2t}$，我们得出 $X_0 = e^{-2t}X$，我们将它代入上式，再将 X 换成 x，就得到了

$$p(x,t) = \left(\frac{x}{2}(e^{-2t}-1) + \frac{1}{2+\sin(xe^{-2t})}\right)^{-1}.$$

下面我们考虑拟线性（quasilinear）问题。回到刚才的一维波方程，

$$\frac{\partial}{\partial t}p + c(x,t,p)\frac{\partial}{\partial x}p = r(x,t,p), \quad p(x,0) = f(x). \tag{3.5}$$

我们现在令速度函数 $c(x,t,p)$ 也依赖于方程的解 p。这使得特征ODE出现了耦合

$$\frac{dP}{dt} = r(X(t),t,P(t)), \quad \frac{dX}{dt} = c(X(t),t,P(t)).$$

我们对比半线性问题，就会发现在半线性问题中，X 方程是跟 P 无关的，我们可以先对 $X(t)$求解。而且，如果 $c(x,t)$ 满足一些条件（ODE课上大家会学习），从不同点出发的特征线不会相交。不幸的是，对于拟线性问题，可能会出现特征线相交的情况。

我们以一维的 Burgers' equation 为例

$$p_t + pp_x = 0, \quad p(x,0) = f(x).$$

我们引入特征线方程

$$\frac{dX}{dt} = p(X(t),t), \quad X(0) = X_0.$$

令 $P(t;X_0) = p(X(t;X_0),t)$，则

$$\frac{d}{dt}P = \frac{d}{dt}p(X(t),t) = \frac{dX}{dt}p_x + p_t = pp_x + p_t = 0.$$

于是，我们推导出了如下的特征方程

$$\frac{dX}{dt} = P, \quad X(0) = X_0, \tag{3.6}$$

$$\frac{dP}{dt} = 0, \quad P(0) = f(X_0). \tag{3.7}$$

注意到，由于 P 的方程里面不含 X，我们可以先接 P 方程，再反过来解 X 方程。

我们先天真的求解如下，由$P(t) = P(0)$

$$P(t;X_0) = p(X(t),t) = p(X(0),0) = p(X_0,0) = f(X_0),$$

于是，再解 X 方程，我们得到

$$X(t) = f(X_0)t + X_0.$$

但事实上，在有限时间内，Lagrangian 解可能会出现特征线相交的情况。

例如，我们考虑下面的初值条件

$$p(x,0) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \le 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

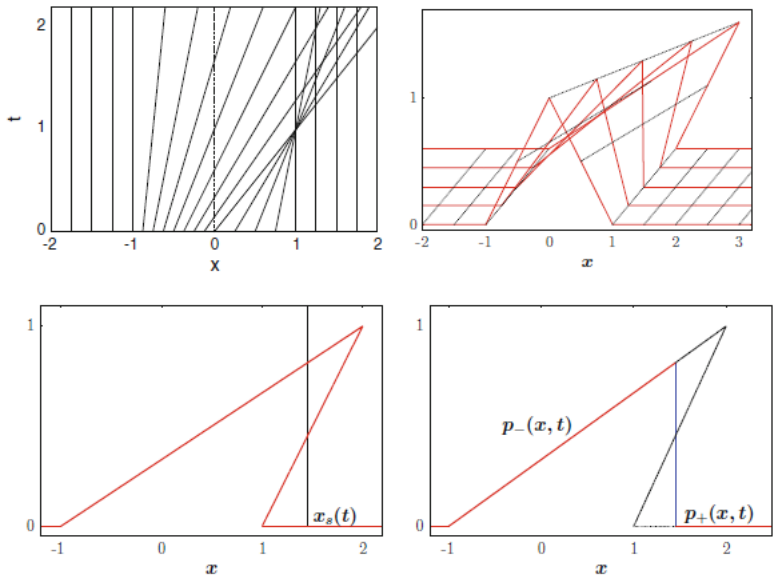
于是，我们可以分段求解，得到 Lagrangian 解

$$\begin{cases} X = X_0, & P = 0, & X_0 < -1. \\ X = (1+X_0)t + X_0, & P = 1+X_0, & -1 \le X_0 \le 0, \\ X = (1-X_0)t + X_0, & P = 1-X_0, & 0 \le X_0 \le 1, \\ X = X_0, & P = 0, & X_0 > 1. \end{cases}$$

我们亦可以把他们写回Eulerian的形式

$$p(x,t) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \dfrac{1+x}{1+t}, & -1 \le x \le t, \\ \dfrac{1-x}{1-t}, & t \le x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

通过观察特征线，我们发现特征线会在 $t=1$ 时出现相交，也就是说，当 $t>1$ 时，这种分片定义的解会出现重复定义的区域（如图所示）。那么特征线相交之后呢？人们一般认为会出现激波（shock）解或者多值解。本讲义中，我们只介绍一种在一定应用范围内（比如，流体，交通流等）有物理意义的解：激波解。但是请注意，在其他应用领域中，可能激波解并不是有物理意义的解。



我们下面介绍空间一维时的激波解的构造：我们希望插入一个激波 $x=x_s(t)$，使得它能够“合理地”分割特征线重合的区域，从而得到一个良定义的单值解。

考虑一个关于 $p(x,t)$ 的平衡率模型，通量函数 $q=q(p)$，即

$$\frac{\partial}{\partial t}p+\frac{\partial}{\partial x}q(p)=0.$$

在一固定的区间 $[a,b]$ 上，我们对上式积分得

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^b p\,dx\right)+q(p)\Big|_{x=a}^{x=b}=0. \tag{3.8}$$

假设我们需要在这个区间里插入一个激波 $x=x_s(t)$，使得我们有如下分片定义的解

$$p(x,t)=\begin{cases} p_-(x,t), & a\le x<x_s(t);\\ p_+(x,t), & x_s(t)<x\le b.\end{cases}$$

于是，我们将 (3.8) 中的项按照激波的左右分开成

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\int_a^{x_s} p_-\,dx\right)-q\left(p_-(a,t)\right)\right]+\left[\frac{d}{dt}\left(\int_{x_s}^b p_+\,dx\right)+q\left(p_+(b,t)\right)\right]=0.$$

我们计算时间导数（注意 $x_s(t)$ 是时间的函数）得

$$\left(\int_a^{x_s}\frac{\partial p_-}{\partial t}dx+p_-(x_s,t)\frac{dx_s}{dt}\right)+\left(\int_{x_s}^b\frac{\partial p_+}{\partial t}dx-p_+(x_s,t)\frac{dx_s}{dt}\right)+\left[q\left(p_+(b,t)\right)-q\left(p_-(a,t)\right)\right]=0.$$

我们可以进一步整理得

$$\left(\int_a^{x_s}\partial_t p_-\,dx+q\left(p_-(x_s,t)\right)-q\left(p_-(a,t)\right)\right)+\left(\int_{x_s}^b\partial_t p_+\,dx+q\left(p_+(b,t)\right)-q\left(p_+(x_s,t)\right)\right)$$
$$-q\left(p_-(x_s,t)\right)+q\left(p_+(x_s,t)\right)+\left[p_-(x_s,t)-p_+(x_s,t)\right]\frac{dx_s}{dt}=0.$$

注意，上式中，第一行的两个括号内的项由于守恒律的积分形式分别相互抵消了。于是我们推导出了 *Rankine-Hugoniot* 波速条件

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{q\big(p_+(x_s,t)\big) - q\big(p_-(x_s,t)\big)}{p_+(x_s,t) - p_-(x_s,t)}.$$

例如，在 inviscid Burgers equation 中，$q = \frac{1}{2}p^2$，此时 R-H 波速条件为

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{\frac{1}{2}\big(p_+(x_s,t)\big)^2 - \frac{1}{2}\big(p_-(x_s,t)\big)^2}{p_+(x_s,t) - p_-(x_s,t)} = \frac{1}{2}\big(p_+(x_s,t) + p_-(x_s,t)\big).$$

回到刚才的例子，我们可以容易得到激波满足的方程

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{1+x_s}{2(1+t)}, \quad x_s(1) = 1.$$

通过求解，我们得到激波的表达式

$$x_s(t) = \sqrt{2(1+t)} - 1 \quad \text{for} \quad t \geq 1.$$

于是最终，我们得到当 $t \geq 1$ 时，这个inviscid Burgers equation 的解为

$$p(x,t) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ (1+x)/(1+t) & -1 \leq x < x_s(t) \\ 0 & x > x_s(t) \end{cases}$$

关于激波解的更多知识，感兴趣的同学们会在偏微分方程或者流体力学相关的课程中学习。

3.4 反应扩散方程中的行波解

作为本章节的结束，我们简单介绍一下另外一类方程的行波解现象。在生物数学中，很多群体动力学的表现是以扩散和反应为主，人们因此建立的数学模型是反应扩散方程。感兴趣的同学可以阅读 Benoît Perthame 教授的教材《Parabolic equations in Biology》（我们也可以在北大图书馆下载到这本书的电子版）。

3.4.1 引例：肿瘤增长模型*

作为引例，我们选讲 Benoît Perthame 在2014年国际数学家大会上一小时报告的部分内容，感兴趣的同学们请参考

`https://www.ljll.math.upmc.fr/perthame/cours_M2.pdf`

为了建立固态肿瘤的演化过程，我们引入以下变量

- $\rho(\boldsymbol{x},t)$ 肿瘤细胞的密度函数；
- $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ 细胞的运动速度；
- $p(\boldsymbol{x},t)$ 细胞组织中的压力；
- $c(\boldsymbol{x},t)$ 营养物的浓度
- $G(c,p)$ 生长因子。

密度函数的演化方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot\big(\rho u\big) = \rho G(c,p), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\, t\geq 0.$$

压力和速度之间通过 Darcy's law 建立关系，

$$\boldsymbol{u} = -\nabla_{\boldsymbol{x}} p(\rho).$$

为了使得模型完整，我们需要给出压力 p 和密度ρ 的关系，即本构关系（Constitutive law）。常见的选择有

$$p(\rho) = \frac{m}{m-1}\rho^{m-1}\ (m>1), \quad \text{or} \quad p=\log\rho. \tag{3.9}$$

大家注意，这其实是一个平衡率模型。通量函数是ρu, 而源函数是 ρG.

如果我们选择 $p(\rho)=\frac{m}{m-1}\rho^{m-1}$ 就会得到推广的多孔介质方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = \Delta\rho^m + \rho G.$$

这是一类退化的抛物方程。例如当 $m=2$ 且 $G\equiv 0$ 时，我们可以将方程改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = 2\rho\Delta\rho + 2|\nabla\rho|^2.$$

注意到，当 $u\neq 0$ 时，方程中有变系数的扩散项 $2\rho\Delta\rho$。但是当 $u\to 0$ 时，这个方程形式上话可简化成 $\frac{\partial}{\partial t}\rho\sim 2|\nabla\rho|^2$，这种方程被称为 eikonal equation，是一阶非线性双曲方程中的一种。

如果我们选择 $p=\log\rho$，那么就得到如下的反应扩散方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = \Delta\rho + \rho G.$$

下一步，为了刻画肿瘤细胞的生长对于压力和营养物浓度的依赖关系，我们可以进一步对生长因子 $G(c,p)$ 进行建模，我们这里就不展开了。

3.4.2 Traveling wave solutions （行波解）

很多时候方程的解是有很多个（比如一元二次方程就有两个解）。对于微分方程来说，我们知道求解往往非常复杂，甚至不可实现。但是，我们与其把通解（甚至是弱解的集合）找出来，再挑一个跟应用相关的，有时候，我们不如直接去找一个跟应用相关的特解。下面介绍的行波解就是这么一个例子。

人们对行波解的研究可以追溯到1930年：Fisher第一次提出了基因优势的波形传播模型。而在1937年，Kolmogrov、Petrovski和Piskunov对第一次对这个模型做了数学上的分析。后来，人们在生态学中的物种入侵（例如北美麝鼠在布拉格农场的逃逸和扩散）、瘟疫扩散（例如欧洲14世纪黑死病的传播）、燃烧波、物质的相变甚至神经科学等各种领域找到了行波解的应用。

需要强调的是，反应扩散方程的行波解其实是一种有点“反直觉”的特解，因为一般的扩散现象是和保持形状不变是相矛盾的。可是，对于行波解来说，方程的扩散作用和反应的增损作用达到了一种平衡，使得解能够保持固定的形状按照固定的速度平移。

考虑简化了的一维的反应扩散方程

$$\rho_t - \rho_{xx} = f(\rho).$$

这里，$\rho(x,t)\in[0,1]$ 表示密度，$f(\rho)$ 表示（绝对）反应率函数，它满足

$$f(0)=f(1)=0.$$

注意，这仍然是一个平衡率模型。

为了寻找行波解，我们希望解出满足如下条件的特解，

$$\rho(x,t)=v(x-ct),\quad c\in\mathbb{R},\quad v(-\infty)=1,\quad v(+\infty)=0.$$

这里，$v(x)$ 刻画了解的形状，而 c 给出了波速。

我们考虑几个具体的例子。第一个例子中，我们令

$$f(\rho)=\rho(1-\rho).$$

显然，从变化率的角度看，平衡态 $\rho=1$ 是稳定的，$\rho=0$ 是不稳定的，如果把 $\rho=1$ 理解成占据态，$\rho=0$ 理解成未占据态的话，我们期待行波解的波速 $c>0$，表示一种优势种群占据态的扩张或者入侵。第二个例子中，我们考虑

$$f(\rho)=\rho(1-\rho)(\rho-\theta),\quad \theta\in(0,1).$$

这是一个我们接触过的双稳态模型，$\rho=0$ 和 $\rho=1$ 都是稳定的平衡态，这时候波速的符号待定。

易知，行波解满足

$$-cv'-v''=f(v),\quad v(-\infty)=1,\quad v(+\infty)=0.$$

对于一些相对简单的变化率模型，我们有可能找到行波解的解析形式。

我们考虑如下的点燃温度模型（ignition temperature model）: For $\theta\in(0,1)$, and $\mu>0$,

$$f(\rho)=\begin{cases}0, & 0\le\rho<\theta\\ \mu(1-\rho), & \theta<\rho\le 1.\end{cases}$$

我们下面证明，存在唯一的解 (c^*,v)，使得 $v(x)$ 是一个递减函数，$v(0)=\theta$, 而且 $c^*>0$。这里，$v(0)=\theta$ 可以理解为，为了找到唯一解而选取的可解性条件。

当 $x<0$ 时，我们有 $\rho>\theta$，所以方程约化为

$$cv'+v''+\mu(1-v)=0.$$

由于$v(-\infty)=1$ (蕴含有界性)，我们得到下面的解

$$v(x)=1-(1-\theta)e^{\lambda_+ x},\quad x<0,$$

其中，

$$\lambda_+=\frac{1}{2}(-c+\sqrt{c^2+4\mu}).$$

而当 $x>0$ 时，我们有 $\rho<\theta$，所以方程约化为

$$cv'+v''=0.$$

由于$v(+\infty)=0$，我们得到下面的解

$$v=\theta e^{-cx},\quad x\ge 0.$$

注意到，由于 f 在 θ 处不连续，所以v'' 在 0 处有一个间断跳跃（这蕴含了v'在 0 处连续），所以我们得到

$$(1-\theta)\lambda_+=\theta c.$$

再利用一些简单的微积分方法，我们可以证明满足条件的波速 $c^*>0$ 可以被唯一确定。而且，$v(x)$ 的表达式可以看出，v 的确是一个单调递减函数（作业）。更多关于反应扩散方程行波解的知识，可以参考《Parabolic equations in Biology》的第四章。