数学模型　序言

周珍楠

BICMR, Peking University
Email: zhennan@bicmr.pku.edu.cn
Office: 78406-02, Jingchunyuan 78 (镜春园78号院)

2022年春季学期

今日计划

课程大纲

前言：什么是数学模型

我们来谈一下如何理解数学模型

内容预览

参考书目

- 数学模型（第4版） [Mathematical Model]（姜启源，谢金星，叶俊）
- Methods of Mathematical Modelling –Continuous Systems and Differential Equation （Thomas Witelski, Mark Bowen）
- Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems （Richard Haberman）
- 现代数学基础：微分方程与数学物理问题（中文校订版）（Nail H.Ibragimov）

注：**不需要**买教材，英文教材图书馆有在线资源。

教学内容

本学期教学大纲大致包括:

变化速率模型，数学物理方程模型，变分法初步，边值问题，方程的量纲分析和自相似解，稳定性模型，概率模型……等等

讲义、作业、期中试卷都会定期更新在

课程主页:

http://bicmr.pku.edu.cn/ zhennan/teaching/MM22/

办公室地址

78406-02, 镜春园78号院。

Office Hour:

周三上午9-11点。（单周）
周三上午10-11点。（双周）

评分方法:

- A：两周一次作业，单周布置作业（除了第7周，第15周之外），于次周的周日（23：59）前在教学网提交。共6次作业。所有作业总计100分，占学期总分的10%；
- B (B1+B2): 4月13日（第8周，周三），6月9日（第16周，周三）课堂上，我们进行期中考试。每次考试时间为100分钟，满分100分，分别占学期总分的30%。
- C：学期末最后一节课之前每组上交一份term project，每组由1-4名同学构成。Term project的具体要求和分组情况会在学期中公布。Term project满分为100分，占学期总分的30%。
- 也就是说，你的学期总分=A*0.1+(B1+B2)*0.3+C*0.3。

注意：你的总分是卷面分数，我们有可能会因为优秀率的限制在不改变名次的条件下进行整体调分。

其他注意事项

作业要求:

不接受晚交的作业和term project。老师鼓励同学们之间讨论作业题目，但是每个同学必须自己独立写作业。作业可以手写，也可以用电脑写（word, latex等方式）再打印出来。作业的收发由助教老师负责

Office hour 和助教职责

本学期助教每周都会设置office hour答疑。同学也可以通过电子邮件联系我答疑。请大家注意，我们的微信群是主要供同学们相互交流讨论的，老师和助教不在微信群里答疑。

助教

- 张梓航，2001110040@pku.edu.cn。Office Hour：周四上午9-11点，21楼一层会议室。。
- 黎敏铮，1801110057@pku.edu.cn。Office Hour：周五下午1-3点，21楼203室。。

Where to start...

It can scarcely be denied that the supreme goal of all theory is to make the irreducible basic elements as simple and as few as possible without having to surrender the adequate representation of a single datum of experience.

—Albert Einstein

如何理解数学模型?

我们开篇提到了爱因斯坦的名言，虽然原文是讨论的理论，但是他的这句话有一个被近似过的更接地气的版本：

Everything Should Be Made as Simple as Possible, But Not Simpler.

这样，我们也可以用这句话来思考数学模型了。事实上，一直以来科学家们深知数学建模重要性和数学模型的局限性。我们不妨现在欣赏几句名家名言:



Figure: From Wiki. From left to right: Alan Turing, George Box and Mark Kac.

This [mathematical] model will be a simplification and an idealisation, and consequently a falsification. It is to be hoped that the features retained for discussion are those of greatest importance ⋯

——Alan Turing

⋯all models are wrong, but some are useful.

——George Box

Models are, for the most part, caricatures of reality, but if they are good, they portray some features of the real world.

——Mark Kac

我们来尝试定义数学模型吧

Witelski 和 Bowen 在教材的前言中提出了一个具有操作性的定义：

Model: a useful, practical description of a real-world problem, capable of providing systematic mathematical predictions of selected properties

我们注意以下的一些伴随着这个定义的观点：

- （平衡论）Models allow researchers to assess balances and trade-offs in terms of levels of calculation details versus limitations on predictive capabilities.

- （对错论）Concerns about models being “wrong” or “false” or “incomplete” are actually criticisms of the levels of physics, chemistry or other scientific details being included or omitted from the mathematical formulation.

- （结果论 A） Once a well-defined mathematical problem is set up, its mathematical study can be an important step in understanding the original problem. This is particularly true if the model predicts the observed behaviors (a positive result).

- （结果论 B）However, even when the model does not work as expected (a negative result), it can lead to a better understanding of which (included or omitted) effects have significant influence on the system’s behavior and how to further improve the accuracy of the model.

从数学模型到数学建模

对于这些观点，我是是需要学习批判接受的。基于这些观点，我们可以形成一个对模型的一个比较辨证的认识：

Models are expressions of the hope that aspects of complicated systems can be described by simpler underlying mathematical forms.

那么又怎么理解建模呢？Witelski 和 Bowen 如此描述：

Modelling: a systematic mathematical approach to formulation, simplification and understanding of behaviors and trends in problems.

要了解建模的话，我们其实需要在基于上述对于模型的抽象认识上，对模型及其相关概念进行一些具体的分类和讨论。

数学模型离不开实际问题。粗略的来说，实际问题可以被分成一下几类。

1. 正问题（Forward problems）。如果已知关于目标系统所有必要的信息，我们是否可以定量的预测该系统的其他性质，或者预测该系统将如何运作？例子：一辆车的最大可达速度是多少？一种疾病将多快地在某个城市的人群中传播？

我们如何预测神经元的动力学行为？

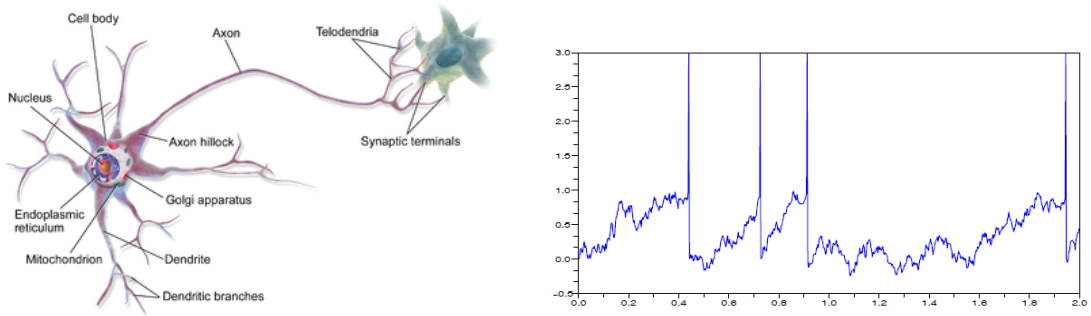


Figure: Left: schematic plot of a neuron. (Wiki) Right: the LIF model.

2. 反问题（Inverse problems）。如果某个“黑箱”系统的某些信息不能够直接得到，是否可以通过某种“反向工程”的方式来找到这些缺失的参数？例子：是否可以通过医学图像的数据来估计肿瘤的位置？我们是否可以通过一个振子的时间序列数据来确定它的阻尼（衰减）系数？

Can you hear the shape of a drum?



Figure: Gordon, former faculty at Washington University in St. Louis, with paper models of a pair of "sound-alike" drums.

https://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-199706

3. 控制优化问题（Control and optimization problems）。我们是否能创造（设计）出一个系统的解，来满足一个给定的目标？例子：什么形状的纸飞机可以飞得最远？如果给一个药丸设计糖衣，使得药物可以在一整天内按照一个恒定的速率释放？

最速降线问题（Brachistochrone）

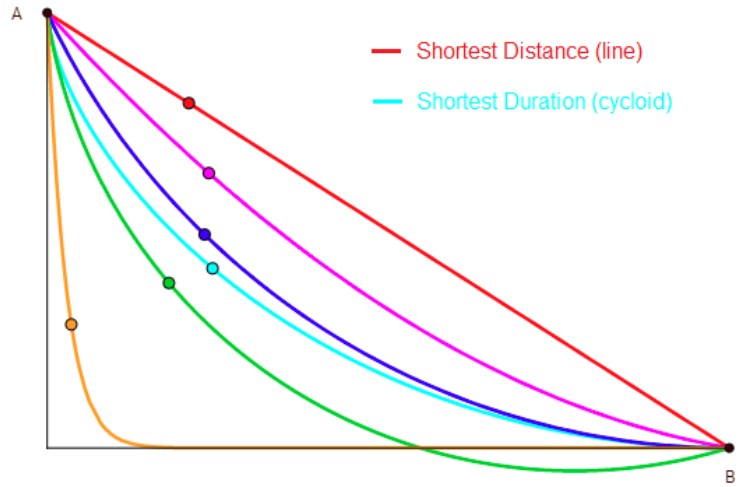


Figure: 在所有连接A和B的平面曲线中，求出一条曲线，使仅受重力作用且初速度为零的质点从A点到B点沿这条曲线运动时所需时间最短。

按照复杂性和完整性，我们可以对模型的等级有如下的描述

$$\textbf{"Toy" Problem} \quad \leq \quad \textbf{Math Problem} \quad \leq \quad \textbf{Complete System}.$$

而建模过程也可以大体分为被分成两个阶段：

- 模型的形成（formulation phase）；
- 模型的求解（solution phase）。

这也构成了我们这学期学习的主要两个方面。

注：本学期只涉及模型求解的解析技巧，数值方法不在本课程的范围之内。

内容速看

- 第一章：序言和模型举例，从数学家的角度管窥科学
- 第二章：变化率模型，常微分方程教我们看时间演化
- 第三章：运动的模型，理解宏观量的时空演化
- 第四章：变分原理，通过泛函的极值理解最优
- 第五章：边值问题，理解边界条件对解的结构约束
- 第六章：概率、随机模型，很多奇妙问题的开端
- 第七章：量纲分析，绕开物理单位只谈相对尺度
- 第八章：渐进分析，抓非线性问题的主要矛盾