

北京大学

数学模型课程期末作业

题目：MFG 理论中的数学模型

——平均场理论在博弈论中的跨域应用

院　　系：数学科学学院

小组成员：程梓恒 2000010828

冯宣瑞 2000010804

唐博文 2000010827

尹 顺 2000010765

指导教师：周珍楠

二〇二二年六月

目录

1 背景介绍 **1**

2 平均场理论在统计力学中的应用 **1**

3 MFG 的基本假设与问题描述 **2**
3.1 模型假设与记号 2
3.2 MFG 问题的描述 2

4 模型的建立与推导 (FP-HJB system) **3**
4.1 homogeneous 3
4.1.1 Fokker-Planck (FP) 3
4.1.2 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 3
4.2 multi-class 4
4.2.1 K 类 5
4.2.2 Major Player 5

5 模型的分析与验证 **8**
5.1 真实博弈 8
5.2 MFG 模型对真实博弈的逼近 9
5.3 MFG 模型的现实意义 10
5.4 青出于蓝, 而胜于蓝 10
5.5 广泛应用, 优势显著 10
5.6 MFG 模型的局限性 11

Appendices **13**

附录 A 命题 2 的证明 **13**

附录 B 命题 3 的结论与证明 **14**
B.1 PDE 系统 14
B.2 命题的证明 15

附录 C Linear-Quadratic Case **17**

附录 D 命题 4 的证明 **20**

附录 E 命题 5 的证明 **21**

摘要

本文就博弈论中的数学模型进行讨论, 主要讨论和分析了统计力学中的重要理论——平均场理论在博弈论中的应用 (我们称之为平均场博弈论, 即 Mean Field Game, MFG). 本文首先介绍平均场博弈论的产生背景以及原始的平均场理论在统计力学中的应用; 随后给出 MFG 的模型假设和问题描述, 并进行模型的建立与推导, 在 homogeneous 和 multi-class 两种不同的情形下得到 MFG 问题的 FP-HJB 系统. 其中对于 multi-class 情形, 本文讨论了 K 类和 major player 两种情况, 并且进一步给出了较为完整的结果. 此外, 本文进行了模型的分析和验证, 主要比较了 MFG 模型给出的结果和真实博弈中可能的结果, 以得出将平均场理论应用在博弈论中的合理性. 在这一部分中本文证明了, 从期望收益的角度来看, MFG 的 Nash 均衡可以近似地视为真实博弈中的 Nash 均衡, 并最后给出了 MFG 模型设定的现实意义、MFG 对统计力学平均场思想的借鉴和超越、以及 MFG 在多智能体强化学习等领域中的应用. 最后, 本文指出了 MFG 模型的局限性及未来的发展方向.

关键词: 平均场方法; 平均场博弈论; FP-HJB 系统; Nash 均衡; MARL

1 背景介绍

平均场博弈论 (Mean Field Games, MFG) 主要利用平均场方法来研究大量对象之间的博弈问题.

所谓平均场方法 (平均场理论, Mean Field Theory, MFT), 是将随机过程模型中一个单体受到的所有影响近似为一个外部场, 从而将多体问题分解为多个单体问题的方法. 平均场理论最早来源于皮埃尔 · 居里 (Pierre Curie) 和皮埃尔 · 外斯 (Pierre-Ernest Weiss) 对于相变的研究过程. 1937 年, 朗道 (Landau) 总结了早期的各种平均场理论, 如描述气-液相变的 Van derWaals 方程、描述铁磁体相变的 Weiss 理论及描述合金有序-无序相变的 Bragg-Williams 理论等, 并提出了一个普遍的平均场理论. 因此, MFT 也被称为朗道平均场理论. MFT 是一个在统计力学中非常重要的理论, 在现代理论物理学、化学和信息科学中也都有广泛的应用.

平均场博弈论诞生于 2006 年, 由蒙特利尔的 Minyi Huang, Roland Malhamé, Peter Gaines 和巴黎的 Jean-Michel Lasry, Pierre-Louis Lions 两个团队独立提出. 通过使用平均场的方法, 我们可以认为一个对象的决策依赖于所有人决策的概率分布 (也就是说, 我们将其他对象的影响近似视为了一个外部场, 而不是对其他单个对象的决策进行考虑).

一个典型的例子是, 对于某个在股市中进行交易的股民, 其并不是通过逐一了解其他的每一个股民具体进行了什么样的交易来进行决策, 而是根据股票的走势和股价来判断. 事实上这里的股价、股票的走势等信息就可以视为一个平均场, 它反映的是其他股民决策的概率分布.

2 平均场理论在统计力学中的应用

平均场论是研究复杂多体问题的方法, 将数量巨大的互相作用的多体问题转化成每一个粒子处在一种弱周期场中的单体问题. 我们知道解决一般情况下的多体问题是公开问题, 除了一些非常简单的例子以外, 包含相互作用的多元系统往往难以精确求解. 平均场的主要思想是, 将其他分子对某个单体的作用以一个有效场代替, 或者称为有效作用, 这样将多体问题转化成近似等效的单体问题. 容易看到, 简化后的模型相比原问题容易求解, 可以帮助我们更好地理解系统的行为, 并且耗费的计算量也相对较低.

平均场论由来已久, 源于皮埃尔 · 居里与皮埃尔 · 外斯对相变的研究工作中. 或许我们也可以追溯得更早一些: 1873 年范 · 德 · 瓦尔斯通过考虑分子间斥力和引力的影响提出了著名的范 · 德 · 瓦尔斯状态方程. 在推导过程中, 他用这种平均场的方式, 即以平均的方式来看待所有其它分子对某一特定分子的作用, 来代替精确地研究和描述每一个分子的运动规律.

二十世纪以来, 研究多体物理的凝聚态物理学中出现了许多以平均场思想为主要特征的理论, 比较著名的有: 居里和外斯关于铁磁物质的分子 (平均) 场理论; 斯通纳关于铁磁金属的传导电子交换 (平均) 场理论; 奈耳关于反铁磁物质和亚铁磁物质的分子 (平均) 场理论 (奈耳因此获得 1970 年诺贝尔物理学奖); 巴丁、库珀和施里弗关于超导电性的 BCS 理论 (他们因此获得 1973 年诺贝尔物理学奖), 被称之为配对势平均场理论. 这些理论在本质上都是如同范 · 德 · 瓦尔斯所做的那样, 把微观粒子间的吸引和排斥相互作用用平均场方式来处理. 今天, 凝聚态理论物理学家面临的一个重大挑战是: 如何阐明高温超导物理机制. 有很多理论物理学家认为, 这里面临的首要问题就是: 与高温超导物理机制相联系的平均场是什么.

平均场论已经成为许多凝聚态物理和粒子物理理论的基础, 也是统计物理中非常重要的一种分析方法, 或者更进一步地, 是一种思想. 统计物理期望宏观的热力学现象的微观解释, 相信系统中个体的局部相互作用可以产生宏观层面较为稳定的行为, 而平均场论恰恰符合了这样的思想. 更重要的是, 平均场论便于使用, 降低了对分析的要求, 并且在许多时候这样得出的结果与实际情况也几乎匹配.

3 MFG 的基本假设与问题描述

3.1 模型假设与记号

我们的模型设定主要参考自 Bensoussan, Frehse, Yam, et al. [2], 并对书中许多缺失的证明和模糊的内容进行了原创性的补充和完善.

设 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathcal{P})$ 是概率空间, $(\mathscr{F}^t)_{t\geq 0}$ 是由 n 维标准布朗运动 $W(t)$ 生成的 σ-域流 (Filtration). 设

$$g:\ \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n,\ \sigma:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n};$$

$$f:\ \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ h:\ \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$

是可测函数, 其中 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上概率测度构成的集合. 这些函数可能依赖于时间 t, 为了记号的简便, 我们在此省略. 另外, 我们假设 $\sigma(x)$ 可逆, 且 $\sigma(x)$ 和 $\sigma^{-1}(x)$ 都是有界的, 并且假设 g, σ, f, h 关于两个变元 x, v 均是可微的.

设策略空间为 $\mathcal{A} \subset C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$. 对任意策略函数 $v \in \mathcal{A}$, 考虑 $v(.)$ 诱导的 Mckean-Vlasov Process:

$$dx(t) = g(x(t), m(t), v(x(t)))dt + \sigma(x(t))dW(t),\ x(0) = x_0. \tag{1}$$

这里 $m(t)$ 表示 $x(t)$ 的概率分布.

而对任意 $(v(.), \mu(.))$, 我们可以定义目标函数 $J_{MFG}(v(.), \mu(.))$ 如下:

$$J_{MFG}(v(.), \mu(.)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(x(t), \mu(t), v(x(t)))dt + h(x(T), \mu(T))\right].$$

其中 $x(t)$ 满足 $(v(.), \mu(.))$ 诱导的 SDE

$$dx(t) = g(x(t), \mu(t), v(x(t)))dt + \sigma(x(t))dW(t),\ x(0) = x_0. \tag{2}$$

注意 SDE 2 中 $\mu(t)$ 不一定是解 $x(t)$ 的概率分布, 因此 1 是 2 的特殊情形.

注 1. 为了数学上处理方便, 这里我们假设整个博弈是 *one-shot game*, 即每个决策者只能在初始时刻制定好自己的策略, 不能在博弈过程中随时间改变. 事实上这在现实应用中, 已经包含了非常广泛的情形.

3.2 MFG 问题的描述

我们仅考虑让 J_{MFG} 取到极大值的情形 (也就是说它是一个收益函数的情形) . 换言之, 我们的目标是找一组 SDE 1 对应的 $(\hat{v}, m)$, 使得

$$J_{MFG}(\hat{v}, m) \geq J_{MFG}(v, m), \forall v \in \mathcal{A}.$$

其中 J_{MFG} 的定义如 3.1 节, 即

$$J_{MFG}(v, m) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(x(t), m(t), v(x(t)))dt + h(x(T), m(T))\right].$$

这里 $x(t)$ 是 $(v(.), m(.))$ 诱导的 SDE 2 的解, 而 $m(t)$ 表示 $\hat{v}(.)$ 诱导的 SDE 1 的解 $\hat{x}(t)$ 的概率分布.

注 2. 这里对 $(\hat{v}, m)$ 的要求看起来很奇怪, 但其实际上反映了博弈论中**纳什均衡 *(Nash Equilibrium, NE)*** 的观点. 在真实的博弈情景中 *(见5.1)*, 对参与者 *Alice* 而言, 假设其他参与者策略均为 $\hat{v}$, 从而状态变量的分布在任意时刻均相同, 均为 $m(.)$, 而 *Alice* 的策略为 v. 那么 (v, m) 将近似地 *(见5.2)* 诱导 *Alice* 的状态变量满足的 *SDE 2.* 此时, *Alice* 的最优策略恰为 $\hat{v}$, 在最优策略下的状态分布也恰为 $m(.)$. 这说明如果所有人的策略均为 $\hat{v}$, 则这个策略组合满足 ***NE***, 从而我们关于平均场的假设是合理的.

4 模型的建立与推导 (FP-HJB system)

在本节中, 我们均考虑 SDE 1.

4.1 homogeneous

在这一节中, 我们将考虑 homogeneous 的情形, 即我们认为所有的对象是完全相同的. 换句话说, 他们会采取相同的策略.

令

$$u(x,t) := \max_{v\in\mathscr{A}} \mathbb{E}\left[\int_t^T f(x(s), m(s), v(x(s)))ds + h(x(T), m(T))\Big| x(t) = x\right].$$

特别地, 令

$$u(m_0, 0) := \mathbb{E}_{x\sim m_0} u(x, 0) = \max_{v\in\mathscr{A}} J_{MFG}(v, m)$$

是 MFG 问题中要求的最大期望收益.

接下来定义扩散算子 A 和它的对偶算子 A^* 为

$$A\varphi = -\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j},\ A^*\varphi = -\sum_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}(a_{ij}\varphi),\ \forall\varphi\in C^2(\mathbb{R}^n),$$

其中 (a_{ij}) 形成的矩阵为 $(a_{ij}) = \sigma(x)\sigma(x)^T$.

有了这些记号, 我们来考虑 homogeneous 情形下问题的 FP-HJB system.

4.1.1 Fokker-Planck (FP)

由于 $dx(t) = g(x(t), m(t), v(x(t)))dt + \sigma(x(t))dw(t)$, 故有 Fokker-Planck 方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial m}{\partial t} + A^* m + \nabla\cdot(g(x,m,v)m) = 0,\\ m(0) = m_0.\end{cases}$$

4.1.2 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

接下来考虑 HJB 方程, 定义 Lagrangian 量 $L : \mathbb{R}^n\times\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 和 Hamiltonian 量 $H : \mathbb{R}^n\times\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为:

$$L(x,m,v,q) = f(x,m,v) + q\cdot g(x,m,v),\ H(x,m,q) = \max_{v\in\mathcal{A}} L(x,m,v,q).$$

我们假定最大值在 $v = \hat{v}(x, m, q)$ 处取到, 即有

$$H(x, m, q) = L(x, m, \hat{v}(x, m, q), q).$$

再令 $G(x, m, q) = g(x, m, \hat{v}(x, m, q))$.

根据动态规划原理 (DPP), 对 $t \le \tau \le T$, 有

$$u(x,t) = \max_{v\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f(x(s), m(s), v(x(s)))ds + u(x(\tau),\tau)\Big| x(t) = x\right]. (*)$$

用 $x(t)$ 替换 x, 并由 *Itô* formula 得

$$\begin{aligned} du =& \frac{\partial u}{\partial t}dt + \nabla u \cdot dx_t + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} d\langle x^i, x^j\rangle_t \\ =& (\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u \cdot g - Au)dt + \nabla u \cdot \sigma dW(t). \end{aligned}$$

从而

$$u(x(\tau),\tau) - u(x(t),t) = \int_t^\tau (\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u \cdot g - Au)dt + \int_t^\tau \nabla u \cdot \sigma dW(t).$$

代入 $(*)$ 得到

$$0 = \max_{v\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\left[\int_t^\tau (f + \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u \cdot g - Au)ds\Big| x(t) = x\right].$$

令 $\tau \to t$ 得

$$0 = \max_{v\in\mathcal{A}} f(x, m, v) + \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u \cdot g - Au.$$

即我们得到 $-\dfrac{\partial u}{\partial t} + Au = H(x, m, \nabla u)$, 以及最优策略 $v = \hat{v}(x, m, \nabla u)$.

综上, 我们得到 MFG 问题中的 FP-HJB system:

命题 1. *在 homogeneous 的 MFG 问题的设定下, 有 PDE 系统*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial m}{\partial t} + A^* m + \nabla \cdot (G(x, m, \nabla u)m) = 0, \ (FP) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + Au = H(x, m, \nabla u), \ (HJB) \\ m(0) = m_0, \ u(x, T) = h(x, m(T)). \end{cases}$$

其中 A, A^*, G, H 如上定义.

4.2 multi-class

在上一节中, 我们考虑了 homogeneous(所有对象采取相同策略) 的情形. 但是在实际情况中, 可能并不是所有人都会采取相同的策略. 因此, 下面我们将讨论两种更加复杂的情形: 其一是所有的参与者按照他们采取的策略被分成 K 种不同的类型; 其二是前者的特殊情形, 即除了一个特定的参与者之外, 其余人都采取相同的策略. 我们将这个特殊的角色称为 Major Player, 其所采取的策略会影响平均场, 同时也会受到平均场的影响.

注 3. *对于 K 类的情况, 其 FP-HJB system 的推导并没有增添太多复杂度, 但其现实指向性无疑更加普遍, 这也是我们考虑这一情形的初衷. 而 Major Player 的情况由于其相对特殊的设定, 我们得以进行进*

一步具体的计算和推导, 同时它的现实指向也十分明确: 即代表了存在某种寡头垄断的条件下参与者的平等博弈, 在金融等领域有着广泛的应用场景.

4.2.1 K 类

这一节中我们将参与者按照状态分成 K 类. 具体而言, 对每个 $1 \leq i \leq N$, 令 $\alpha^i \in \{1, 2, \cdots, K\}$ 表示第 i 个参与者属于第 α^i 类.

对第 k 类中的参与者, 他们有相同的状态, 即

$$\begin{cases} dx_k = g_k(x_k(t), m(t), v(x_k(t)))dt + \sigma_k(x_k(t))dW(t) \\ x_k(0) = x_{k0}. \end{cases}$$

他们也有相同的收益, 即

$$J_k(v, m) = \mathbb{E}(\int_0^T f_k(x_k(t), m(t), v(x_k(t)))dt + h_k(x_k(T), m(T))).$$

另外, 我们对 α^i 有一个额外的假定:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbb{I}_{\alpha^i = k} \to \pi_k (N \to \infty).$$

注 4. 此处假定即为当 $N \to \infty$ 时, 参与者的归类情况趋于一个给定的分布, 因而极限过程只与 N 的变化有关, 由此可以证明 $\frac{1}{N-1}\sum_{j \neq i} \delta_{x^j(t)} \to m(x,t)dx, a.s.$ 进而得到期望收益对真实收益的收敛性. 在 *5.2* 中我们还将具体给出其收敛速率.

类似地, 定义

$$a_k(x) = \frac{1}{2}\sigma_k(x)\sigma_k(x)^T;\ A_k\varphi(x) = -tr(a_k(x)\nabla^2\varphi(x));$$

$$L_k(x, m, v, q) = f_k(x, m, v) + q \cdot g_k(x, m, v);\ H_k(x, m, q) = \sup_{v \in \mathscr{A}} L_k(x, m, v, q);$$

以及令 $\hat{v}_k(x, m, q)$ 是使得 L_k 取得最大值的策略, 再定义 $G_k(x, m, q) = g_k(x, m, \hat{v}_k(x, m, q))$.

我们可以完全类似地得到 K 类下的 FP-HJB system, 即

$$HJB: \begin{cases} -\frac{\partial u_k}{\partial t} + A_k u_k = H_k(x, m, \nabla u_k), \\ u_k(x, T) = h_k(x, m(T)). \end{cases}$$

$$FP: \begin{cases} \frac{\partial m_k}{\partial t} + A_k^* m_k + \nabla \cdot (G_k(x, m, \nabla u_k)m_k) = 0, \\ m_k(x, 0) = m_{k0}(x). \end{cases}$$

4.2.2 Major Player

在这一节, 我们考虑博弈中存在一个 Major Player 的情形. 在这种情况下, 我们需要分别讨论 Major Player 和其他的参与者, 并给出相应的策略函数. 首先给出模型的具体假设.

对于 Major Player 而言: 状态为

$$\begin{cases} dx_0 = g_0(x_0(t), m(t), v(t))dt + \sigma_0(x_0(t))dW_0(t), \\ x_0(0) = \xi_0. \end{cases}$$

收益函数为

$$J_0(v_0) = \mathbb{E}(\int_0^T f_0(x_0(t), m(t), v_0(t))dt + h_0(x_0(T), m(T))).$$

σ-域流为

$$\mathcal{F}^{0t} = \sigma_0(\xi_0, W_0(s), s \le t).$$

对其他参与者而言: 状态为

$$\begin{cases} dx = g(x(t), x_0(t), m(t), v(t))dt + \sigma(x(t))dW(t), \\ x(0) = \xi. \end{cases}$$

收益函数为

$$J(v, x_0, m) = \mathbb{E}(\int_0^T f(x(t), x_0(t), m(t), v(t))dt + h(x(T), x_0(T), m(T))).$$

$\sigma-$ 域流为

$$\mathcal{F}^t = \sigma(\xi, W(s), s \le t).$$

令 $\mathcal{G}^t = \mathcal{F}^{0t} \cup \mathcal{F}^t$.

我们首先推导其他参与者的结果.

引入以下的 Kolmogorov 向前向后方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} + A^* p + \nabla \cdot (g(x, x_0, m, v)p) = 0, \\ p(x, 0) = p_0(x). \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial q}{\partial t} + Aq = f(x, x_0, m, v) + g(x, x_0, m, v) \cdot \nabla q, \\ q(x, T) = h(x, x_0(T), m(T)). \end{cases}$$

并定义 $u(x,t) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}^{0t}} q(x,t)$.

注 5. 这里的 $p(x,t), q(x,t)$ 即为在给定 $\cup_t \mathcal{F}^{0t}$ 的情况下 $x(t)$ 的条件密度和条件收益, 类似 *4.1* 节中的论证即可得到上述方程. 这里 $q(x,t)$ 满足的随机向后方程区别于 *HJB* 方程, 是因为我们并未假设其最优性. 进一步, $u(x,t)$ 表示在给定 $\cup_t \mathcal{F}^{0t}$ 的情况下的条件期望收益.

由 $u(x,t) - \int_0^t \mathbb{E}^{\mathcal{F}^{0s}} \dfrac{\partial q}{\partial s} ds$ 为 $\mathcal{F}^{0t}$-鞅, 故存在函数 $K(x,t)$ 使得:

$$u(x,t) - \int_0^t \mathbb{E}^{\mathcal{F}^{0s}} \frac{\partial q}{\partial s} ds = u(x,0) + \int_0^t K(x,s) dW_0(s).$$

进而

$$u_t dt - \mathbb{E}^{\mathcal{F}^{0t}} \frac{\partial q}{\partial t} dt = K dW_0(t).$$

对随机向后方程两边用 $\mathbb{E}^{\mathcal{F}^{0t}}$ 作用, 并结合上述知

$$\begin{cases}(-u_t + Au)dt = (f(x, x_0, m, v) + g(x, x_0, m, v) \cdot \nabla u)dt - KdW_0(t), \\ u(x, T) = h(x, x_0(T), m(T)).\end{cases}$$

命题 2. *假设 $J(v, x_0, m)$ 在 $\hat{v}$ 处取到最大值, 则 $\hat{v}$ 满足:*

$$\frac{\partial L}{\partial v}(x, x_0, m, v, \nabla u)|_{v=\hat{v}} = 0.$$

证明. 参照附录 A. □

设 $L(x, x_0, m, v, q)$ 在 $\hat{v}$ 处取到最大值, 令 $H(x, x_0, m, q) = L(x, x_0, m, \hat{v}(x, x_0, m, q), q)$, 再令 $G(x, x_0, m, q) = g(x, x_0, m, \hat{v}(x, x_0, m, q))$, 则我们给出了其他参与者的最优策略如下:

$$\begin{cases}(-u_t + Au)dt = H(x, x_0, m, \nabla u)dt - KdW_0(t) \quad u(x, T) = h(x, x_0(T), m(T)), \\ \dfrac{\partial m}{\partial t} + A^* m + \nabla \cdot (G(x, x_0, m, \nabla u)m) = 0 \quad m(x, 0) = p_0(x), \\ \hat{v}(x, t) = \hat{v}(x, x_0(t), m(t), \nabla u(x, t)).\end{cases} \tag{3}$$

类似地, 我们给出 Major Player 的结果.

命题 3. *假设 $J_0(x_0, m, v_0)$ 在 $\hat{v_0}$ 处取到最大值, 则 $\hat{v_0}$ 满足:*

$$\frac{\partial}{\partial v_0}(f_0(x_0, m, v_0) + p^* \cdot g_0(x_0, m, v_0)) = 0.$$

这里的 $p(t)$ 由 PDE 系统 B.1 给出.

证明. 参照附录 B.2. □

假设

$$H_0(x_0, m, p) = \sup_{v_0} \ f_0(x_0, m, v_0) + p^* \cdot g_0(x_0, m, v_0)$$

且 $\hat{v}_0$ 使 $f_0 + p^* \cdot g_0$ 取到最大值, 并记 $G_0(x_0, m, p) = g_0(x_0, m, \hat{v}_0(x_0, m, p))$. 则我们给出了 Major Player 的最优策略如下:

$$\begin{cases}-dp = & \Big[\dfrac{\partial H_0}{\partial x_0}(x_0, m, p) + \displaystyle\int \frac{\partial G^*}{\partial x_0}(x, x_0, m, \nabla u)\nabla\eta \cdot m dx + \int \zeta \cdot \frac{\partial H}{\partial x_0}(x, x_0, m, \nabla u)dx\Big]dt \\ & -\displaystyle\sum_l q_l dW_{0l}(t) + \sum_l \frac{\partial \sigma_{0l}^*}{\partial x_0} q_l dt, \\ p(T) = & \dfrac{\partial h_0}{\partial x_0}(x_0(T), m(T)) + \displaystyle\int \zeta(x, T)\frac{\partial h}{\partial x_0}(x, x_0(T), m(T))dx.\end{cases}$$

$$\begin{cases}(-\dfrac{\partial \eta}{\partial t} + A\eta)dt & = & \Big[\dfrac{\partial H_0}{\partial m}(x_0, m, p) \cdot p + \nabla\eta \cdot G(x, x_0, m, \nabla u) + \displaystyle\int \nabla\eta \cdot \frac{\partial G}{\partial m}(x)m d\xi + \int \zeta \cdot \frac{\partial H}{\partial m}(x)d\xi\Big]dt \\ & & -\displaystyle\sum_l \mu_l dW_{0l}(t), \\ \eta(x, t) & = & \dfrac{\partial h_0}{\partial m}(x_0(T), m(T))(x) + \displaystyle\int \zeta(\xi, T)\frac{\partial h}{\partial m}(\xi, x_0(T), m(T))(x)d\xi.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}+A^*\zeta+\nabla\cdot(G(x,x_0,m,\nabla u)\zeta)+\nabla\cdot(\dfrac{\partial G^*}{\partial q}(x,x_0,m,\nabla u)\nabla\eta\cdot m)=0,\\ \zeta(x,0)=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}dx_0=G_0(x_0,m,p)dt+\sigma_0(x_0)dW_0(t),\\ x_0(0)=\xi_0.\end{cases}$$

$$\hat{v_0}(t)=\hat{v_0}(x_0(t),m(t),p(t)).$$

结合 3 我们得到了 Major Player Problem 的完整结果.

注 6. 限于 *MFG* 问题中模型函数具体形式的高度自由性, 即使对于相对简化的 *Major Player* 情形, 我们仍难以给出最优策略的显式表达, 以上的 *SDE* 系统形式虽然复杂, 已经是理论上的较好结果. 不过, 在实际应用中, 这一系统为最优策略的数值模拟和估计给出了很好的参照, 仍然具有重要的现实意义.

值得一提的是, 在相当广泛的一类现实问题中,f,g,f_0,g_0 具有很好的光滑性和 Lipschitz 连续性, 从而可以被线性项和二次项很好地逼近. 而进一步的计算可以说明, 当我们假定 g 关于 x,x_0,v 以及 g_0 关于 x_0,v_0 为线性函数, 而 f 关于 x,x_0,v 以及 f_0 关于 x_0,v_0 为二次函数 (这一情形被称为 Linear-Quadratic Case) 时, 可以更加具体地计算出最优策略: 最终所得的系统方程形式更加简洁, 各变量耦合程度更低, 且关于各变量均为一次函数, 从而更利于进行数值求解, 对于最初的现实问题是很好的近似结果. 这一部分的具体内容详见附录 C.

5 模型的分析与验证

5.1 真实博弈

为了将 MFG 的理论应用到真实的博弈场景中, 我们考虑如下形式的博弈: 设共有 N 个参与者, 其在 t 时刻状态变量记为 $x(t)=(x^1(t),\cdots,x^N(t))$, 其中上标 i 表示第 i 个参与者. 策略空间为 $\mathcal{A}^N$. 对一个策略组 $v\in\mathcal{A}^N$, 记 $v(x)=(v^1(x^1),\cdots,v^N(x^N))$.

在本节中, 我们主要考虑 SDE 2. 设轨道方程为

$$\begin{cases}dx^i(t)=g(x^i(t),\dfrac{1}{N-1}\displaystyle\sum_{j\neq i}\delta_{x^j(t)},v(x^i(t)))dt+\sigma(x^i(t))dW^i(t)\\ x^i(0)=x_0^i\end{cases}$$

其中 $W^i(t)$ 为 N 个独立的 n 维标准布朗运动, x_0^i 为 i.i.d. 随机变量且概率分布均为 m_0. 此时第 i 个参与者的期望收益为

$$J^i(v)=\mathbb{E}\int_0^T f(x^i(t),\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{x^j(t)},v^i(x^i(t)))+h(x^i(T),\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{x^j(T)})$$

为了技术上处理的方便, 以下我们假设每个参与者的状态空间 $Q\in\mathbb{R}^N$ 为紧集, 从而 $supp(m_t^i)\subset Q$. 设在可测空间 $(Q,\mathcal{B}_Q)$ 上的所有概率测度构成的集合为 $\mathcal{P}(Q)$, 我们引入 $\mathcal{P}(Q)$ 上的度量: **Wasserstein distance**.

定义 1. 对 $p\geq 1$, 记 $\mathcal{P}_p(Q)=\left\{\mu\in\mathcal{P}(Q):\displaystyle\int|x|^p d\mu(x)<\infty\right\}$. 对 $\mu,\nu\in\mathcal{P}_p(Q)$, 定义 *Wasserstein*

distance $d_p(\mu,\nu)$ 为

$$d_p(\mu,\nu)=\inf_{\gamma\in\Pi(\mu,\nu)}(\int|x-y|^p d\gamma(x,y))^{\frac{1}{p}}$$

其中 $\Pi(\mu,\nu)=\{\gamma\in\mathcal{P}(Q\times Q):\gamma(\cdot,Q)=\mu,\gamma(Q,\cdot)=\nu\}$.

由于 Q 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, 故 $\mathcal{P}_p(Q)=\mathcal{P}(Q),\forall p\geq 1$. 一个熟知的结论是配有 Wasserstein distance d_p 的度量空间 $(\mathcal{P}(Q),d_p)$ 也为紧度量空间. 以下我们主要考虑 $(\mathcal{P}(Q),d_1)$.

命题 4. 设 Q 为紧度量空间, u_N 为 Q^N 上的对称函数列, 且一致有界, *L-Lipschitz* 连续, 其中 $L>0$. 则存在 $\{u_N\}_N$ 的子列 $\{u_{N_k}\}_k$ 及 *L-Lipschitz* 连续函数 $U:\mathcal{P}(Q)\longrightarrow\mathbb{R}$,*s.t.*

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{X\in Q^{N_k}}|u_{N_k}(X)-U(m_x^{N_k})|=0.$$

证明. 参照附录 D. □

注 7. 在很多情形下, 真实博弈中的各个函数 $(f,g,\cdots)$ 为对称, 有界, 光滑的函数. 上述命题说明, 其在 $N\to\infty$ 时, 子列会一致收敛到一个定义在整个 $\mathcal{P}(Q)$ 上的光滑函数. 因此, 我们不妨直接假设 $f,g,\cdots$ 均可以定义在 $\mathcal{P}(Q)$ 上, 且在 *Wasserstein distance* d_1 下为 *Lipschitz* 连续函数, 这一方面是对真实情形非常好的近似, 同时也大大降低了分析 *MFG* 的难度, 使其在真实博弈中的应用成为可能.

5.2 MFG 模型对真实博弈的逼近

命题 5. 设 f,h,g,σ 及所有可能的决策 $v\in\mathcal{A}$ 关于其变元的 *Lipschitz* 范数分别为 L_f,L_h,L_g,L_σ,L_v. 设 *MFG* 的纳什均衡中策略为 $\hat{v}_N$, 期望收益为 $J_{MFG}(\hat{v}_N)$, 对应 *Mckean-Vlasov Process (SDE 1)*

$$dy_t^i=g(y_t^i,m_t,\hat{v}_N(y_t^i))dt+\sigma(y_t^i)dW_t^i,\ 1\leq i\leq N$$

又假设真实博弈的纳什均衡中, 每个参与者均采用策略 $\hat{v}_N$, 即

$$\begin{cases}dx_t^i=g(x_t^i,\dfrac{1}{N-1}\sum\limits_{j\neq i}\delta_{x_t^j},\hat{v}_N(x_t^i))dt+\sigma(x_t^i)dW_t^i\\ x_0^i=y_0^i\end{cases}$$

设此时的期望收益为 $J(\hat{v}_N)$, 则存在仅与 $L_f,L_h,L_g,L_\sigma,L_v,T$ 有关的常数 c,c_1, 使得

(1) $|J_{MFG}(\hat{v}_N)-J(\hat{v}_N)|\leq cN^{-\frac{1}{n+4}}$

(2) 设其他参与者策略仍为 $\hat{v}_N$ 时, 若参与者 *1* 的最优策略为 v, 此时参与者 *1* 的期望收益为 $J^1(v,\hat{v}_N,\cdots,\hat{v}_N)$, 则

$$J^1((v,\hat{v}_N,\cdots,\hat{v}_N))-J^1(\hat{v}_N)\leq c_1N^{-\frac{1}{n+4}}$$

证明. 参照附录 E. □

注 8. 结合 *(1)(2)* 说明, 从期望收益的角度看, *MFG* 的纳什均衡可以近似地视为真实博弈中的纳什均衡.

注 9. 收敛速率 $O(N^{-\frac{1}{n+4}})$ 是一个保守估计. 关于 $F_n(\mu)=\mathbb{E}_{x_i\sim\mu}d_1(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}\delta_{x_i},\mu)$ 的上界估计在 *MFG* 的证明中至关重要. 进一步的细节可在 *[4]* 中找到.

5.3 MFG 模型的现实意义

MFG 模型的现实意义首先体现在其广泛的适用性. 尽管在 3中关于模型设定的形式似乎比较固定, 但由于我们引入的决策空间 $\mathcal{A}$、收益函数 f、漂移函数 g 等参量具有很强的灵活性, 除了一些基本的光滑性假设外没有任何其他形式上的限制, 因此这一模型能够囊括非常多的应用场景. 对于单个参与者而言, 收益函数 f, 漂移函数 g 均为三元函数, 意味着其可以同时考虑自己的状态、其他参与者的状态以及自己的决策. 在现实场景中, 这也反映了参与者信息来源的不同, 我们引入的 multi-class 情形, 可以有效处理博弈信息不透明不对称的情况.

MFG 模型的现实意义其次体现在大数量参与者的博弈案例在现实中的普遍性. 模型的合理性要求参与者数量足够多, 且他们归于固定的若干种类型, 这样的场景在现实生活中十分常见. 一个典型的例子就是期权市场: 大量的个体投资者 (参与者) 通过期权的交易 (决策) 以获取收益. 尽管每个人对信息的获取、对风险的喜好、对行情的看法等不尽相同, 但基于其庞大的数量, 参与者仍然可以被大致划分为几类, 并通过各种途径相互作用. 从而我们可以运用 MFG 模型方法对期权市场进行分析, 指导期权定价, 制定交易策略.

5.4 青出于蓝, 而胜于蓝

MFG 模型来源于统计力学的平均场思想, 其巧妙之处在于充分利用参与者的同质性和对称性, 将参与者之间复杂的相互作用转化为整体作用, 即借鉴了场的思想. 在真实的博弈场景中, 如果要精确描述每一对个体的相互作用, 其计算复杂度将会随着参与者规模上升而呈现指数级增长, 这在数据量爆炸的现代社会是不可能完成的. 因此, 作为一种近似方法, MFG 在处理大规模问题时具有非常显著的计算优势.

关于 MFG 中耦合 PDE 系统的解法, 如今一些基于深度学习和有限差分的数值方法已经发展的较为成熟. 例如, 通过神经网络拟合决策函数, 并通过离散模拟整个 SDE 过程, 最后用梯度下降算法优化 J_{MFG}. 而有限差分离散的算法可以参考 Achdou and Capuzzo-Dolcetta [1]. 在这里我们不做展开.

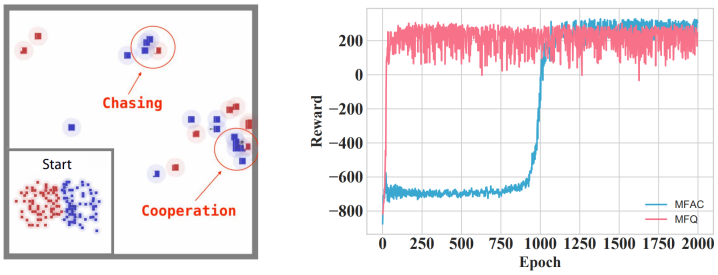
MFG 模型在借鉴统计力学思想之余, 并不是平凡地将真实博弈场景中的参与者视为统计力学中的粒子. 事实上, 由于每个参与者不仅可以自行做决策, 还能通过与其他参与者之间的交互作用实时改变自己的决策, 因而 MFG 描述的不仅是每个参与者状态空间的统计性质, 更是他们的决策空间的统计性质 [3]. 从5.2关于逼近的证明中, 我们也能看到, 决策空间中的平均场起到了至关重要的作用. 这样的思想是对传统统计力学的平均场思想的提升.

此外, 从经济学的角度看, MFG 与金融物理学也有着本质的区别. 金融物理学是通过用物理学的理论和方法 (例如动力学模型) 去**描述**金融现象, 但并未解释人们在不同环境和不同自身条件下为什么会做出相应的决策. 而 MFG 模型得以借助物理学的思想, 去**解释**这些决策的合理性.

5.5 广泛应用, 优势显著

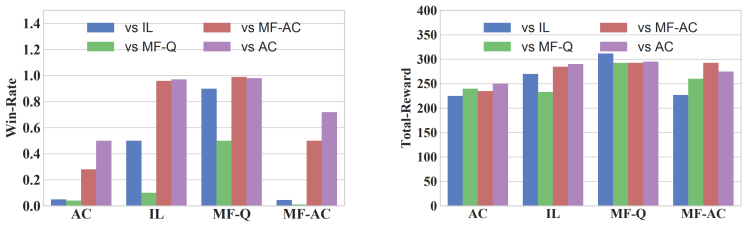
我们从理论上分析了利用 MFG 估计大群体博弈场景的合理性. 如今, MFG 也已经被广泛用于解决各类大规模问题, 其中包括多智能体强化学习 (Multi-Agent Reinforce Learning, MARL)、期权定价等. 我们以 MARL 为例介绍 MFG 的具体应用 Yang et al. [5].

在 MFG 出现之前, 包括 AlphaGo 在内的诸多强化学习应用案例中, 主要都以单个或少数几个智能体 (agent) 的群体为基础. 但在更复杂的 MARL 情形下 (如交通网络中), 司机的行为会受到其他司机及周围路人的影响, 这时就有必要考虑大量智能体之间的交互作用. 经典的 MARL 算法会面临指数级增长的计算复杂度, 而 MFG 的出现则恰好简化了这个问题. 在 MFMARL 的工作中, 这一工作的作者将 MFG 的思想融入强化学习经典的 Q-Learning 算法, 这里的 $Q = Q(s, a)$ 为收益函数, 即在某一时刻的



(a) Battle game scene. (b) Learning curve.

图 1: Mixed Cooperative-Competitive Battle Game.



(a) Average wining rate. (b) Average total reward.

图 2: Performance comparisons in the battle game.

state $= s$ 条件下, 采取决策 a 能够获得的期望收益. 这与我们的设定 $J_{MFG} = J_{MFG}(v, m)$ 本质上是相同的. 对于一个智能体 j 而言, 如果在每个时刻都要逐一考虑其他智能体的决策, 在计算上是不现实的. 而在 MFMARL 中, 作者利用 Q 的光滑性, 对其进行泰勒展开, 最终可以简化为只考虑其他智能体决策的平均, 即 $a \approx (a^j, \bar{a}^j)$, 其中 $\bar{a}^j = \dfrac{1}{N-1}\sum_k a^k$. 再利用相应的 MF-Q 等算法, 可以对收益函数 Q 进行拟合. 由此可见, MFG 的引入大大地简化了模型的计算代价.

此外, 该工作的作者也做了不同强化学习算法下 Mixed Cooperative-Competitive Battle Game 的实验. 实验中有两个群体军队互相对抗, 每个军队包含 64 个智能体, 每个智能体需要通过环境和自身的状态制定决策, 使己方军队获取最大收益. 结果如图1和图2所示. 我们可以看到基于 MFG 的算法 MF-Q 表现最优, 取得了非常好的效果. MFG 在强化学习中的应用还有很多, 限于篇幅关系我们不再一一列举; 以上的分析与验证已经足以表明, MFG 模型在金融、人工智能、群体博弈乃至军事等领域, 具有广泛且重要的借鉴和参考意义, 无愧为" 他山之石, 可以攻玉" 的精彩成果.

5.6 MFG 模型的局限性

尽管 MFG 在诸多场景都有非常好的应用, 但没有模型是完美的, MFG 也有自身的局限性.

其一, MFG 能够发挥威力的前提是参与者的规模足够庞大, 但在某些情况下, 例如以石油贸易、通信行业等为代表的寡头市场, 只有少数几个寡头参与博弈, 从而 MFG 并不适用于这种场景.

其二, MFG 的设定与逼近效果高度依赖于收益与随机过程本身的形式, 且需要收益函数、漂移函数等的显式表达式, 并不能涵盖所有的真实博弈情形.

其三, 尽管 MFG 做了很大程度的简化, 但其结果以庞大的耦合 PDE 系统形式给出, 并不容易求解. 现有的数值方法只能处理其中一部分的情况, 而在更复杂的情形下 MFG 缺乏稳定、高效的数值解法, 这也是现在对 MFG 研究的一个重要课题.

References

[1] Yves Achdou and Italo Capuzzo-Dolcetta. "Mean field games: numerical methods". In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 48.3 (2010), pp. 1136–1162.

[2] Alain Bensoussan, Jens Frehse, Phillip Yam, et al. *Mean field games and mean field type control theory*. Vol. 101. Springer, 2013.

[3] Areski Cousin et al. *Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2010*. Springer, 2010.

[4] Benjamin Jourdain, Sylvie Méléard, and Wojbor Woyczynski. "Nonlinear SDEs driven by Lévy processes and related PDEs". In: *Alea* 4 (2008), pp. 1–29.

[5] Yaodong Yang et al. "Mean field multi-agent reinforcement learning". In: *International Conference on Machine Learning*. PMLR. 2018, pp. 5571–5580.

Appendices

附录 A　命题 2 的证明

引理 1. $J(v,x_0,m)=\int p_0(x)\cdot\mathbb{E}u(x,0)dx.$

证明. 回忆 $p_0(x),u(x,t)$ 由以下方程给出:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial p}{\partial t}+A^*p+\nabla\cdot(g(x,x_0,m,v)p)=0,\\ p(x,0)=p_0(x).\end{cases}$$

$$\begin{cases}(-u_t+Au)dt=(f(x,x_0,m,v)+g(x,x0,m,v)\cdot\nabla u)dt-KdW_0(t),\\ u(x,T)=h(x,x_0(T),m(T)).\end{cases}$$

由分部积分知:

$$\begin{aligned}&\int p(x,T)h(x,x_0(T),m(T))dx-\int p_0(x)q(x,0)dx\\ =&\int\int_0^T\frac{\partial}{\partial t}(pq)dtdx\\ =&\int\int_0^T p(Aq-f(x,x_0,m,v)-g(x,x_0,m,v)\cdot\nabla q)-q(A^*p+\nabla\cdot(g(x,x_0,m,v)p))dtdx\\ =&-\int_0^T\int p\cdot f(x,x_0,m,v)dxdt.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}J(v,x_0,m)=&\mathbb{E}(\int_0^T\int p(x,t)f(x,x_0,m,v(x,t))dxdt+\int p(x,T)h(x,x_0(T),m(T))dx)\\ =&\mathbb{E}\int p_0(x)\cdot q(x,0)dx=\int p_0(x)\cdot\mathbb{E}q(x,0)dx=\int p_0(x)\cdot\mathbb{E}u(x,0)dx.\end{aligned}$$

□

由泛函导数的知识我们得到, 引入以下的扰动:

$$\tilde{v}=v+\theta v^*\quad\tilde{u}=u+\theta u^*\quad\tilde{K}=K+\theta K^*\quad\tilde{J}=J+\theta J^*.$$

扰动满足边值条件:

$$u^*(x,T)=0.$$

从而我们得到:

$$\tilde{J}(\tilde{v},x_0,m)=\int p_0(x)\mathbb{E}\tilde{u}(x,0)dx.$$

其中 $\tilde{u},\tilde{K}$ 满足:

$$(-\tilde{u}_t+A\tilde{u})dt=(f(x,x_0,m,\tilde{v})+g(x,x_0,m,\tilde{v})\cdot\nabla\tilde{u})dt-\tilde{K}dW_0(t).$$

若 $J(v,x_0,m)$ 在 $\hat{v}$ 处取最大值, 则对任意的扰动均有 $\dfrac{d\tilde{J}}{d\theta}(\tilde{v},x_0,m)|_{\theta=0}$ 在 $v=\hat{v}$ 处成立.
由分部积分得:

$$\begin{aligned}\tilde{J}(\tilde{v},x_0,m) =&\mathbb{E}\int\int_0^T -\frac{\partial}{\partial t}(p\tilde{u})dtdx+\mathbb{E}\int p(x,T)\tilde{u}(x,T)dx\\ =&\mathbb{E}\int\int_0^T \tilde{u}(A^*p+\nabla\cdot(g(x,x_0,m,v)p))+p(L(x,x_0,m,\tilde{v},\nabla\tilde{u})-A\tilde{u})dtdx\\ &-\mathbb{E}\int\int_0^T \tilde{K}dW_0(t)dx+\mathbb{E}\int p(x,T)\tilde{u}(x,T)dx\\ =&\mathbb{E}\int\int_0^T \tilde{u}(\nabla\cdot(g(x,x_0,m,v)p))+pL(x,x_0,m,\tilde{v},\nabla\tilde{u})dtdx+\mathbb{E}\int p(x,T)\tilde{u}(x,T)dx.\end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{J}}{d\theta}|_{\theta=0} =&\mathbb{E}\int\int_0^T u^*\nabla\cdot(gp)+p\frac{\partial L}{\partial v}v^*+p\frac{\partial L}{\partial q}\nabla\cdot u^*dtdx\\ =&\mathbb{E}\int\int_0^T u^*\nabla\cdot(gp)+(gp)\nabla\cdot u^*+p\frac{\partial L}{\partial v}v^*dtdx\\ =&\mathbb{E}\int\int_0^T p\frac{\partial L}{\partial v}v^*dtdx.\end{aligned}$$

由扰动的任意性, 我们就得到:

$$\frac{\partial L}{\partial v}(x,x_0,m,v,\nabla u)|_{v=\hat{v}}=0.$$

命题 2 获证.

附录 B　命题 3 的结论与证明

B.1　PDE 系统

$$\begin{cases}-dp= & \Big[\dfrac{\partial g_0^*}{\partial x_0}(x_0,m,v_0)\cdot p+\dfrac{\partial f_0}{\partial x_0}(x_0,m,v_0)+\displaystyle\int\frac{\partial G^*}{\partial x_0}(x,x_0,m,\nabla u)\nabla\eta\cdot mdx+\int\zeta\cdot\frac{\partial H}{\partial x_0}(x,x_0,m,\nabla u)dx\Big]dt\\ & -\displaystyle\sum_l q_l dW_{0l}(t)+\sum_l\frac{\partial\sigma_{0l}^*}{\partial x_0}q_l dt,\\ p(T)= & \dfrac{\partial h_0}{\partial x_0}(x_0(T),m(T))+\displaystyle\int\zeta(x,T)\frac{\partial h}{\partial x_0}(x,x_0(T),m(T))dx.\end{cases}$$

其中 η 和 ζ 满足:

$$\begin{cases} (-\dfrac{\partial \eta}{\partial t}+A\eta)dt &= \Big[\dfrac{\partial g_0}{\partial m}(x_0,m,v_0)\cdot p+\nabla\eta\cdot G(x,x_0,m,\nabla u)+\displaystyle\int\nabla\eta\cdot\frac{\partial G}{\partial m}(x)md\xi+\int\zeta\cdot\frac{\partial H}{\partial m}(x)d\xi \\ &\quad +\dfrac{\partial f_0}{\partial m}(x_0,m,v_0)\Big]dt-\displaystyle\sum_l\mu_l dW_{0l}(t), \\ \eta(x,t) &= \dfrac{\partial h_0}{\partial m}(x_0(T),m(T))(x)+\displaystyle\int\zeta(\xi,T)\frac{\partial h}{\partial m}(\xi,x_0(T),m(T))(x)d\xi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\zeta}{\partial t}+A^*\zeta+\nabla\cdot(G(x,x_0,m,\nabla u)\zeta)+\nabla\cdot(\dfrac{\partial G^*}{\partial q}(x,x_0,m,\nabla u)\nabla\eta\cdot m)=0, \\ \zeta(x,0)=0. \end{cases}$$

B.2　命题的证明

由泛函导数的知识我们得到, 引入以下的扰动:

$$\tilde{v_0}=v_0+\theta v_0^*\quad \tilde{x_0}=x_0+\theta x_0^*\quad \tilde{u}=u+\theta u^*\quad \tilde{m}=m+\theta m^*\quad \tilde{J_0}=J_0+\theta J_0^*,$$

$$x_0^*(0)=0\quad u^*(x,T)=\frac{\partial h}{\partial x_0}(x,x_0(T),m(T))x_0^*(T)+\int\frac{\partial h}{\partial m}(x,x_0(T),m(T))m^*(\xi,T)d\xi\quad m^*(x,0)=0.$$

若 J_0 在 $\hat{v_0}$ 处取最大值, 则对任意的扰动均有 $\dfrac{d\tilde{J_0}}{d\theta}(\tilde{x_0},\tilde{m},\tilde{v_0})|_{\theta=0}=0$ 在 $v_0=\hat{v_0}$ 处成立.
对上述扰动, 我们有以下的结果:

$$d\tilde{x_0}=g_0(\tilde{x_0},\tilde{m},\tilde{v_0})dt+\sigma_0(\tilde{x_0})dW_0(t)$$

$$(-\tilde{u}_t+A\tilde{u})dt=H(x,\tilde{x_0},\tilde{m},\nabla\tilde{u})dt-\tilde{K}dW_0(t)$$

$$\frac{\partial\tilde{m}}{\partial t}+A^*\tilde{m}+\nabla\cdot(G(x,\tilde{x_0},\tilde{m},\nabla\tilde{u})\tilde{m})=0$$

$$\tilde{J_0}=\mathbb{E}(\int_0^T f_0(\tilde{x_0},\tilde{m},\tilde{v_0})dt+h_0(\tilde{x_0}(T),\tilde{m}(T))).$$

对以上的四个式子均进行两边对 θ 求导, 并令 θ=0, 我们得到:

$$dx_0^*=(\frac{\partial g_0}{\partial x_0}x_0^*+\int\frac{\partial g_0}{\partial m}m^*d\xi+\frac{\partial g_0}{\partial v_0}v_0^*)dt+\sum_l\frac{\partial\sigma_{0l}}{\partial x_0}x_0^*dW_{0l}(t)$$

$$(-u_t^*+Au^*)dt=(\frac{\partial H}{\partial x_0}x_0^*+\int\frac{\partial H}{\partial m}m^*+G\cdot\nabla u^*)dt-K^*dW_0(t)$$

$$\frac{\partial m^*}{\partial t}+A^*m^*+\nabla\cdot(Gm^*)+\nabla\cdot((\frac{\partial G}{\partial x_0}x_0^*+\int\frac{\partial G}{\partial m}m^*d\xi+\frac{\partial G}{\partial q}\cdot\nabla u^*)m)=0$$

$$\frac{d\tilde{J_0}}{d\theta}|_{\theta=0}=\mathbb{E}\int_0^T(\frac{\partial f_0}{\partial x_0}x_0^*+\int\frac{\partial f_0}{\partial m}m^*d\xi+\frac{\partial f_0}{\partial v_0}v_0^*)dt+\mathbb{E}(\frac{\partial h_0}{\partial x_0}(x_0(T),m(T))x_0^*(T)+\int\frac{\partial H_0}{\partial m}(x_0(T),m(T))m^*(\xi,T)d\xi).$$

回忆我们引入的随机过程 $p(t)$ 和随机场 $\eta(x,t),\zeta(x,t)$ 的相关结果:

$$\begin{cases} -dp = & \Big[\dfrac{\partial g_0^*}{\partial x_0}(x_0,m,v_0)\cdot p+\dfrac{\partial f_0}{\partial x_0}(x_0,m,v_0)+\displaystyle\int\dfrac{\partial G^*}{\partial x_0}(x,x_0,m,\nabla u)\nabla\eta\cdot m dx+\int\zeta\cdot\dfrac{\partial H}{\partial x_0}(x,x_0,m,\nabla u)dx\Big]dt \\ & -\displaystyle\sum_l q_l dW_{0l}(t)+\sum_l\dfrac{\partial\sigma_{0l}^*}{\partial x_0}q_l dt, \\ p(T) = & \dfrac{\partial h_0}{\partial x_0}(x_0(T),m(T))+\displaystyle\int\zeta(x,T)\dfrac{\partial h}{\partial x_0}(x,x_0(T),m(T))dx. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-\dfrac{\partial\eta}{\partial t}+A\eta)dt &= \Big[\dfrac{\partial g_0}{\partial m}(x_0,m,v_0)\cdot p+\nabla\eta\cdot G(x,x_0,m,\nabla u)+\displaystyle\int\nabla\eta\cdot\dfrac{\partial G}{\partial m}(x)md\xi+\int\zeta\cdot\dfrac{\partial H}{\partial m}(x)d\xi \\ & \quad +\dfrac{\partial f_0}{\partial m}(x_0,m,v_0)(x)\Big]dt-\displaystyle\sum_l\mu_l dW_{0l}(t), \\ \eta(x,t) &= \dfrac{\partial h_0}{\partial m}(x_0(T),m(T))(x)+\displaystyle\int\zeta(\xi,T)\dfrac{\partial h}{\partial m}(\xi,x_0(T),m(T))(x)d\xi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\zeta}{\partial t}+A^*\zeta+\nabla\cdot(G(x,x_0,m,\nabla u)\zeta)+\nabla\cdot(\dfrac{\partial G^*}{\partial q}(x,x_0,m,\nabla u)\nabla\eta\cdot m)=0, \\ \zeta(x,0)=0. \end{cases}$$

将以上结果代入 $\dfrac{d\tilde{J}_0}{d\theta}|_{\theta=0}$ 的表达式, 我们得到:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{J}_0}{d\theta}|_{\theta=0} &= \mathbb{E}\int_0^T(-x_0^*dp-(\frac{\partial g_0^*}{\partial x_0}p+\int\frac{\partial G^*}{\partial x_0}\cdot\nabla\eta\cdot mdx+\int\zeta\frac{\partial H}{\partial x_0}dx)x_0^*dt+\sum_l q_l x_0^*dW_{0l}(t)-\sum_l\frac{\partial\sigma_{0l}^*}{\partial x_0}q_l x_0^*dt) \\ &\quad+\mathbb{E}(p(T)x_0^*(T)-\int\zeta(T)\frac{\partial h}{\partial x_0}(T)dx\cdot x_0^*(T)) \\ &\quad+\mathbb{E}\int_0^T(\int(-\frac{\partial\eta}{\partial t}+A\eta-\frac{\partial g_0}{\partial m}p-\nabla\eta\cdot G-\int\nabla\eta\cdot\frac{\partial G}{\partial m}mdx-\int\zeta\frac{\partial H}{\partial m}dx)m^*d\xi dt+\int\sum_l\mu_l m^*d\xi dW_{0l}(t)) \\ &\quad+\mathbb{E}\int\eta(T)m^*(T)d\xi-\mathbb{E}\int\int\zeta(T)\frac{\partial h}{\partial m}(T)m^*(T)dxd\xi+\mathbb{E}\int_0^T\frac{\partial f}{\partial v_0}v_0^*dt. \end{aligned}$$

由 $Itô$ formula 知:

$$\mathbb{E}(-\int_0^T x_0^*dp+p(T)x_0^*(T))=\mathbb{E}\int_0^T p(\frac{\partial g_0}{\partial x_0}x_0^*+\int\frac{\partial g_0}{\partial m}m^*d\xi+\frac{\partial g_0}{\partial v_0}v_0^*)dt+\mathbb{E}\int_0^T\sum_l\frac{\partial\sigma_{0l}}{\partial x_0}x_0^*q_l dt.$$

由分部积分知:

$$\begin{aligned} &-\int_0^T\int\frac{\partial\eta}{\partial t}m^*d\xi dt+\int\eta(T)m^*(T)d\xi=\int_0^T\int\eta\frac{\partial m^*}{\partial t}d\xi dt \\ =&-\int_0^T\int\eta(A^*m^*+\nabla\cdot(Gm^*)+\nabla\cdot((\frac{\partial G}{\partial x_0}x_0^*+\int\frac{\partial G}{\partial m}m^*dx+\frac{\partial G}{\partial q}\cdot\nabla u^*)m))d\xi dt. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{J}_0}{d\theta}|_{\theta=0} =&-\mathbb{E}\int_0^T\int\zeta\frac{\partial H}{\partial x_0}dx\cdot x_0^*dt-\mathbb{E}\int\zeta(T)\frac{\partial h}{\partial x_0}(T)dx\cdot x_0^*(T)-\mathbb{E}\int_0^T\int\int\zeta\frac{\partial H}{\partial m}dx\cdot m^*d\xi dt \\ &-\mathbb{E}\int\int\zeta(T)\frac{\partial h}{\partial m}(T)m^*(T)dxd\xi+\int_0^T\frac{\partial g_0}{\partial v_0}v_0^*pdt-\int_0^T\int\eta\nabla\cdot(\frac{\partial G}{\partial q}\cdot\nabla u^*m)d\xi dt+\mathbb{E}\int_0^T\frac{\partial f}{\partial v_0}\cdot v_0^*dt. \end{aligned}$$

注意到

$$-\int_0^T\int\zeta(\frac{\partial H}{\partial x_0}x_0^*+\int\frac{\partial H}{\partial m}m^*d\xi)dxdt=\int_0^T\int\zeta(\partial_t u^*-Au^*+G\nabla u^*)dxdt-K^*dxdW_0(t).$$

两边取期望得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(-\int_0^T\int\zeta(\frac{\partial H}{\partial x_0}x_0^*+\int\frac{\partial H}{\partial m}m^*d\xi)dxdt)=\mathbb{E}(\int_0^T\int\zeta(\partial_t u^*-Au^*+G\cdot\nabla u^*)dxdt)\\&=\mathbb{E}\int\zeta(T)(\frac{\partial h}{\partial x_0}(T)x_0^*(T)+\int\frac{\partial h}{\partial m}(T)m^*(T)d\xi)dx+\mathbb{E}\int_0^T\int u^*\cdot\nabla(\frac{\partial G^*}{\partial q}\cdot\nabla u\cdot m)dxdt.\end{aligned}$$

再代入上面的式子中, 我们得到:

$$\frac{d\tilde{J}_0}{d\theta}|_{\theta=0}=\mathbb{E}\int_0^T\frac{\partial f}{\partial v_0}\cdot v_0^*+p^*\cdot\frac{\partial g_0}{\partial v_0}v_0^*dt.$$

由扰动的任意性, 我们就得到:

$$\frac{\partial}{\partial v_0}(f_0(x_0,m,v_0)+p^*\cdot g_0(x_0,m,v_0))=0.$$

命题 3 获证.

附录 C Linear-Quadratic Case

基于4.2.2中得到的关于 Major Player 的结果, 我们来具体计算 Linear-Quadratic Case(LQ) 的情况. 作如下设定:

$$\begin{cases}g_0(x_0,m,v_0)=A_0x_0+B_0v_0+C_0,\\f_0(x_0,m,v_0)=\frac{1}{2}((x_0-P_0z-y_0)^*Q_0(x_0-P_0z-y_0)+v_0^*R_0v_0),\\h_0(x_0,m)\equiv 0,\sigma_0(x_0)\equiv\sigma_0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}g(x,x_0,m,v)=Ax+Dx_0+Bv+C,\\f(x,x_0,m,v)=\frac{1}{2}((x-\bar{P}x_0-Pz-y)^*Q(x-\bar{P}x_0-Pz-y)+v^*Rv),\\h(x,x_0,m)\equiv 0,\sigma(x)\equiv\sigma.\end{cases}$$

其中 $z(t)=\int\xi m(\xi,t)d\xi$.

在上面的假设下, 令 H,H_0 是 (如前文所定义的)Hamiltonian 量, $\hat{v}_0$ 和 $\hat{v}$(类似于前面的定义) 使得 $f_0+p^*\cdot g_0$ 和 $f+p^*\cdot g$ 取最值, 则通过直接计算可以得到:

命题 6.

$$\begin{cases}\hat{v}_0(x_0,m,p)=-R_0^{-1}B_0^*p,\\H_0(x_0,m,p)=\frac{1}{2}(x_0-P_0z-y_0)^*Q_0(x_0-P_0z-y_0)+p^*(A_0x_0+C_0z)-\frac{1}{2}p^*B_0R_0^{-1}B_0^*p,\\G_0(x_0,m,p)=A_0x_0+C_0z-B_0R_0^{-1}B_0^*p.\end{cases}$$

以及

$$\begin{cases}\hat{v}(x,x_0,m,q) = -R^{-1}B^*q,\\ H(x,x_0,m,q) = \dfrac{1}{2}(x-\bar{P}x_0-Pz-y)^*Q(x-\bar{P}x_0-Pz-y)+q^*(Ax+Dx_0+Cz)-\dfrac{1}{2}q^*BR^{-1}B^*q,\\ G(x,x_0,m,q) = Ax+Dx_0+Cz-BR^{-1}B^*q.\end{cases}$$

证明. 我们只证明第一组式子. 第二组的证明是完全类似的.

事实上根据定义我们知道 $\hat{v}_0$ 使得 $f_0+p^*\cdot g_0$ 取最值, 这意味着 $\hat{v}_0$ 使得 $\dfrac{1}{2}v_0^*R_0v_0+p^*B_0v_0$ 取最值. 因此有 $\hat{v}_0=-R_0^{-1}B_0^*p$.

将 $\hat{v}_0$ 的表达式代入 H_0 和 G_0 中即得 $H_0(x_0,m,p)=f_0(x_0,m,\hat{v}_0)+p^*\cdot g_0(x_0,m,\hat{v}_0)=\dfrac{1}{2}(x_0-P_0z-y_0)^*Q_0(x_0-P_0z-y_0)+p^*(A_0x_0+C_0z)-\dfrac{1}{2}p^*B_0R_0^{-1}B_0^*p$ 以及 $G_0(x_0,m,p)=g_0(x_0,m,\hat{v}_0)=A_0x_0+C_0z-B_0R_0^{-1}B_0^*p$. 命题获证. □

对于其他参与者, 回忆前文中定义的 $u(x,t),K(x,t)$, 为简化问题, 我们作以下假设:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}x^*v(t)x+x^*r(t)+s(t)\qquad K(x,t)=x^*K_0(t)+k(t).$$

则前文中关于 $u(x,t)$ 的条件转化为 $v(t),r(t),s(t)$ 的条件.

命题 7. *$v(t)$ 满足以下 Riccati 方程:*

$$\begin{cases}v^{'}+vA+A^*v-vBR^{-1}B^*v+Q=0,\\ v(T)=0.\end{cases}$$

$r(t),s(t)$ 满足以下 SDE:

$$\begin{cases}-dr=(A^*-vBR^{-1}B^*)rdt+((vC-QP)z+(vD-Q\bar{P})x_0-Qy)dt-\sum\limits_l K_{0l}dW_{0l}(t),\\ r(T)=0,\\ -ds=(tr(av)+r(Cz+Dx_0)-\dfrac{1}{2}r^*BR^{-1}Br+\dfrac{1}{2}(\bar{P}x_0+Pz+y)^*Q(\bar{P}x_0+Pz+y))dt-\sum\limits_l k_ldW_{0l}(t).\end{cases}$$

证明. 只有三个微分方程是需要验证的. 我们回忆 $u(x,t)$ 满足的条件:

$$(-\partial_t u+Au)dt=H(x,x_0,m,\nabla u)dt-KdW_0(t),\ Au=-tr(a\nabla^2u).$$

上式两边同时作用 (关于 x 的) Laplace 算子得到

$$(-\partial_t v)dt=(Q+A^*v+vA-vBR^{-1}B^*v)dt.$$

即 $v'+vA+A^*v-vBR^{-1}B^*v+Q=0$.

再对 u 所满足的方程两边对 x 求梯度并代入 $x=0$ 得

$$(-\partial_t r)dt=\left[-Q(\bar{P}x_0+Pz+y)+v(Dx_0+Cz)+A^*r-vBR^{-1}B^*r\right]dt-\sum_l K_{0l}dW_{0l}(t).$$

化简即得 $-dr = (A^* - vBR^{-1}B^*)rdt + ((vC - QP)z + (vD - Q\bar{P})x_0 - Qy)dt - \sum_l K_{0l}dW_{0l}(t)$.

最后对 u 满足的方程两边代入 $x = 0$ 得

$$(-\partial_t s - tr(av))dt = \left[\frac{1}{2}(\bar{P}x_0 + Pz + y)^*Q(\bar{P}x_0 + Pz + y) + r(Dx_0 + Cz) - \frac{1}{2}r^*BR^{-1}Br\right]dt - \sum_l k_l dW_{0l}(t).$$

化简即得 $-ds = (tr(av) + r(Cz + Dx_0) - \frac{1}{2}r^*BR^{-1}Br + \frac{1}{2}(\bar{P}x_0 + Pz + y)^*Q(\bar{P}x_0 + Pz + y))dt - \sum_l k_l dW_{0l}(t)$.
从而命题成立. □

接下来我们给出关于 z 的结果.

命题 8. *z 满足以下的微分方程:*

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = (A - BR^{-1}B^*v + C)z + Dx_0 - BR^{-1}B^*r, \\ z(0) = \displaystyle\int \xi p(\xi)d\xi. \end{cases}$$

证明. 第二个式子由 $m(x, 0) = p(x)$ 直接得到.

回忆 FP 方程表明 $\partial_t m + A^*m + \nabla \cdot (G(x, x_0, m, \nabla u)m) = 0$, 故

$$\begin{aligned} z_t = &\int \xi m_t d\xi = -\int \xi A^* m d\xi - \int \xi \nabla \cdot (Gm)d\xi \\ = &-\int A\xi \cdot m_t d\xi + \int G(\xi, x_0, m, \nabla u)m d\xi \\ = &\int (A\xi + Dx_0 + Cz - BR^{-1}B^*\nabla u)m(\xi)d\xi \\ = &(A - BR^{-1}B^*v + C)z + Dx_0 - BR^{-1}B^*r. \end{aligned}$$

□

对于 Major Player 而言, 回忆我们定义的随机场 η 和 ζ. 假定 $\eta(x, t) = x^*\lambda(t) + \theta(t)$, 并定义 $\chi(t) = \int x\zeta(x, t)dx$(事实上就是 $\mathbb{E}\zeta$). 根据定义我们得到以下的命题:

命题 9. *x_0, p, λ, θ 满足以下的微分方程:*

$$\begin{cases} dx_0 = (A_0x_0 + C_0z - B_0R_0^{-1}B_0^*p)dt + \sigma_0 dW_0(t), \\ x_0(0) = \xi_0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -dp = \left[A_0^*p + D^*\lambda + Q_0(x_0 - P_0z - y_0) + (D^*v - p^*q)\chi\right]dt - \sum_l q_l dW_{0l}(t), \\ p(T) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -d\lambda = \left[(A^* - vBR^{-1}B + C^*)\lambda - P_0^*Q_0(x_0 - P_0z - y_0) + C_0^*p + (C^*v - P^*Q)\chi\right]dt - \sum_l \mu_l dW_{0l}(t), \\ \lambda(T) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\theta = \lambda(Cz + Dx_0 - BR^{-1}B^*r)dt + \sum_l \nu_l dW_{0l}(t), \\ \theta(T) = 0. \end{cases}$$

回忆 $\hat{v}_0(x_0,m,p)=-R_0^{-1}B_0^*P\triangleq\hat{v}(t)$, $\hat{v}(x,x_0,m,p)=-R^{-1}B^*q$, 则有 $\hat{v}(x,t)=\hat{v}(x,x_0,m,\nabla u)=-R^{-1}B^*(vx+r)$.

最后, 在这一问题中我们令 $\chi=\mathbb{E}\zeta=0$. 现在为了得到 $\hat{v}_0$ 和 $\hat{v}$, 我们只需要求解以下的微分方程组:

$$
\begin{cases}
dx_0=(A_0x_0+C_0z-B_0R_0^{-1}B_0^*p)dt+\sigma_0dW_0(t),\\
x_0(0)=\xi_0.
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
-dp=[A_0^*p+D^*\lambda+Q_0(x_0-P_0z-y_0)]-\sum\limits_l q_ldW_{0l}(t),\\
p(T)=0.
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
-d\lambda=\left[(A^*-vBR^{-1}B+C^*)\lambda-P_0^*Q_0(x_0-P_0z-y_0)+C_0^*p\right]dt-\sum\limits_l\mu_ldW_{0l}(t),\\
\lambda(T)=0.
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{dz}{dt}=(A-BR^{-1}B^*v+C)z+Dx_0-BR^{-1}B^*r,\\
z(0)=\displaystyle\int\xi p(\xi)d\xi.
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
-dr=(A^*-vBR^{-1}B^*)rdt+((vC-QP)z+(vD-Q\bar{P})x_0-Qy)dt-\sum\limits_l K_{0l}dW_{0l}(t),\\
r(T)=0.
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
v^{'}+vA+A^*v-vBR^{-1}B^*v+Q=0,\\
v(T)=0.
\end{cases}
$$

这即是 LQ 问题的最终解.

附录 D　命题 4 的证明

证明. 对 $X\in Q^N$, 记 $m_X^N=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^N\delta_{X_i}$. 令 $U^N(m)=\inf\limits_{X\in Q^N}u_N(X)+Ld_1(m_X^N,m)$, $\forall m\in\mathcal{P}(Q)$, 则由 L-Lipschitz 连续性, $U^N(m_X^N)=u_N(X)$.

对 $\forall m_1,m_2\in\mathcal{P}(Q)$, 令 $X\in Q^N$ 为 $U^N(m_2)$ 的定义中 $\epsilon-$ 最优的逼近, 即 $u_N(X)+Ld_1(m_X^N,m_2)\le U^N(m_2)+\epsilon$. 从而有

$$
\begin{aligned}
U^N(m_1)\le&u^N(X)+Ld_1(m_X^N,m_1)\\
\le&U^N(m_2)+\epsilon-Ld_1(m_X^N,m_1)+Ld_1(m_X^N,m_1)\\
\le&U^N(m_2)+Ld_1(m_1,m_2)+\epsilon.
\end{aligned}
$$

令 $\epsilon\to0$, 可得

$$
U^N(m_1)-U^N(m_2)\le Ld_1(m_1,m_2).
$$

同理有

$$
U^N(m_2)-U^N(m_1)\le Ld_1(m_1,m_2).
$$

从而 $\{U^N\}$ 为紧度量空间 $\mathcal{P}(Q)$ 上一致有界, 且 L-Lipschitz 连续的函数列. 由 Arzelà–Ascoli 引理, 存在 $U:\mathcal{P}(Q)\longrightarrow\mathbb{R}$, 使得 $\{U^N\}$ 有子列一致收敛到 U. 注意到 $U^N(m_X^N)=u_N(X)$, 故原命题成立. □

附录 E　命题 5 的证明

证明. (1)

$$\begin{aligned}
d(x_t^i-y_t^i)=[&g(x_t^i,\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{x_t^j},\hat{v}(x_t^i))-g(x_t^i,\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{x_t^j},\hat{v}^i(y_t^i))\\
&+g(x_t^i,\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{x_t^j},\hat{v}^i(y_t^i))-g(x_t^i,\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{y_t^j},\hat{v}^i(y_t^i))\\
&+g(x_t^i,\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{y_t^j},\hat{v}^i(y_t^i))-g(y_t^i,\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{y_t^j},\hat{v}^i(y_t^i))\\
&+g(y_t^i,\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{y_t^j},\hat{v}^i(y_t^i))-g(y_t^i,m_t,\hat{v}^i(y_t^i))]dt\\
&+(\sigma(x_t^i)-\sigma(y_t^i))dW_t^i,
\end{aligned}$$

由 $Itô$ 公式,

$$\begin{aligned}
d\frac{1}{2}||x_t^i-y_t^i||^2&=(x_t^i-y_t^i)d(x_t^i-y_t^i)+\operatorname{tr}\left((\sigma(x_t^i)-\sigma(y_t^i))^2\right)dt\\
&\leq L_g(L_v||x_t^i-y_t^i||^2+d_1(\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{x_t^j},\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{y_t^j})||x_t^i-y_t^i||\\
&+||x_t^i-y_t^i||^2+d_1(\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{y_t^j},m_t)||x_t^i-y_t^i||)dt+L_\sigma||x_t^i-y_t^i||^2dt
\end{aligned}$$

其中 $d_1(\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{x_t^j},\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{y_t^j})\leq\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}||x_t^i-y_t^i||$.

由 [4] Theorem 1.3 可知

$$\sqrt{\mathbb{E}\ d_1^2(\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{y_t^j},m_t)}<c_0N^{-\frac{1}{n+4}}.$$

前面的式子取期望并对 i 求和, 令 $r_t=\mathbb{E}\sum_{i=1}^N||x_t^i-y_t^i||^2=N\mathbb{E}||x_t^1-y_t^1||^2$, 则

$$\begin{aligned}
d\frac{1}{2}r_t&\leq L_g(L_vr_t+\mathbb{E}\sum_{i\neq j}||x_t^i-y_t^i||\cdot||x_t^j-y_t^j||+r_t+c_0N^{-\frac{1}{n+4}}\sum_{i=1}^N\sqrt{\mathbb{E}||x_t^i-y_t^i||^2})dt+L_\sigma r_tdt\\
&\leq(Mr_t+L_g\sqrt{r_t}N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n+4}})dt,
\end{aligned}$$

其中, $M=L_g(L_v+2)+L_\sigma$, 这一步用到平均值不等式. 由此推出 $r_t\leq M_1N^{\frac{n+2}{n+4}}T^2$, 这里 M_1 是充分大常

数. 从而 $\mathbb{E}||x_t^i - y_t^i||^2 \le \sqrt{M_1 T} N^{-\frac{2}{n+4}}$. 故

$$\begin{aligned}
J(\hat{v}_N) - J_{\mathrm{MFG}}(\hat{v}_N) = \mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau} & f(x_t^i, \frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{x_t^j}, \hat{v}_N(x_t^i))dt - f(x_t^i, \frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{x_t^j}, \hat{v}_n(y_t^i))dt \\
& + f(x_t^i, \frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{x_t^j}, \hat{v}_n(y_t^i))dt - f(x_t^i, \frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{y_t^j}, \hat{v}_n(y_t^i))dt \\
& + f(x_t^i, \frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{y_t^j}, \hat{v}_n(y_t^i))dt - f(y_t^i, \frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{y_t^j}, \hat{v}_n(y_t^i))dt \\
& + f(y_t^i, \frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{y_t^j}, \hat{v}_n(y_t^i))dt - f(y_t^i, m_t, \hat{v}_n(y_t^i))dt \\
& + \mathbb{E}h(x_t^i, \frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{x_T^j}) - \mathbb{E}h(y_T^i, m_T) \\
& \le (L_f + L_h)(c\mathbb{E}||x_T^i - y_T^i|| + \mathbb{E}d_1(\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{y_t^j}, m_t) \\
& \le cN^{-\frac{1}{n+4}}.
\end{aligned}$$

(2)

$$d\tilde{x}_t^1 = g(\tilde{x}_t^1, \frac{1}{N-1}\sum_{j\neq 1}\delta_{\tilde{x}_t^j}, \tilde{v}(x_t^1))dt + \delta(\tilde{x}_t^1)dW_t^1,$$

$$d\tilde{x}_t^i = g(\tilde{x}_t^i, \frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{\tilde{x}_t^j}, \tilde{v}(x_t^i))dt + \delta(\tilde{x}_t^i)dW_t^i, i \ge 2.$$

对于 $i \ge 2$,

$$\begin{aligned}
d(\tilde{x}_t^i - d\tilde{y}_t^i) = [& g(x_t^i, \frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{x_t^j}, \hat{v}(x_t^i)) - g(x_t^i, \frac{1}{N-2}\sum_{j=2,j\neq i}\delta_{x_t^j}, \hat{v}(y_t^i)) \\
& + g(x_t^i, , \hat{v}(y_t^i)) - g(x_t^i, \frac{1}{N-2}\sum_{j=2,j\neq i}\delta_{y_t^j}, \hat{v}(y_t^i)) \\
& + g(x_t^i, \frac{1}{N-2}\sum_{j=2,j\neq i}\delta_{y_t^j}, \hat{v}(y_t^i)) - g(y_t^i, \frac{1}{N-2}\sum_{j=2,j\neq i}\delta_{y_t^j}, \hat{v}(y_t^i)) \\
& + g(y_t^i, \frac{1}{N-2}\sum_{j=2,j\neq i}\delta_{y_t^j}, \hat{v}(y_t^i)) - g(y_t^i, m_t, \hat{v}(y_t^i))]dt.\frac{1}{N-2}\sum_{j=2,j\neq i}\delta_{x_t^j}
\end{aligned}$$

上面第一项 $\le L_g d_1(\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{x_t^j}, \frac{1}{N-2}\sum_{j=2,j\neq i}\delta_{x_t^j}) \le L_g\frac{1}{N-2}\mathrm{diam}(Q)$. 故与 (1) 中同理, 可得 $\mathbb{E}||x_t^i - y_t^i||^2 \le M_2 N^{-\frac{2}{n+4}}$.

在 MFG 中考虑第一个参与者的策略为 v 的情形, 其余参与者不变, 即

$$d\tilde{y}_t^1 = g(\tilde{y}_t^1, m_{\tilde{y}_t^1}, v(\tilde{x}_t^1))dt + \sigma(\tilde{y}_t^1)dW_t^1.$$

对 $i=1$,

$$\begin{aligned}
d(\tilde{x}_t^1-\tilde{y}_t^1)=[&g(\tilde{x}_t^1,\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq 1}\delta_{\tilde{x}_t^j},v(\tilde{x}_t^1))-g(\tilde{x}_t^1,\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq 1}\delta_{\tilde{x}_t^j},v(\tilde{y}_t^1))\\
&+g(\tilde{x}_t^1,\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq 1}\delta_{\tilde{x}_t^j},v(\tilde{y}_t^1))-g(\tilde{x}_t^1,\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq 1}\delta_{\tilde{y}_t^j},v(\tilde{y}_t^1))\\
&+g(\tilde{x}_t^1,\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq 1}\delta_{\tilde{y}_t^j},v(\tilde{y}_t^1))-g(\tilde{y}_t^1,\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq 1}\delta_{\tilde{y}_t^j},v(\tilde{y}_t^1))\\
&+g(\tilde{y}_t^1,\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq 1}\delta_{\tilde{y}_t^j},v(\tilde{y}_t^1))-g(\tilde{y}_t^1,m_t,v(\tilde{y}_t^1))]dt\\
&+(\sigma(\tilde{x}_t^1)-\sigma(\tilde{y}_t^1))dW_t^1.
\end{aligned}$$

与 (1) 同理, 我们得到 $d||\tilde{x}_t^1-\tilde{y}_t^1||^2\leq M_3(||\tilde{x}_t^1-\tilde{y}_t^1||^2+N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n+4}}||\tilde{x}_t^1-\tilde{y}_t^1||)$, 从而 $\mathbb{E}||\tilde{x}_t^1-\tilde{y}_t^1||^2\leq M_4N^{-\frac{2}{n+4}}$. 故

$$|J^1(v,\hat{v}_N,\cdots,\hat{v}_N)-J^1_{\mathrm{MFG}}(v,\hat{v}_N,\cdots,\hat{v}_N)|\leq M_5N^{-\frac{1}{n+4}}.$$

其中 J^1 为第一个参与者的收益. 又由 MFG 的 NE 条件,

$$J^1_{\mathrm{MFG}}(v,\hat{v}_N,\cdots,\hat{v}_N)\leq J_{\mathrm{MFG}}(\hat{v}_N)=J^1_{\mathrm{MFG}}(\hat{v}_N,\hat{v}_N,\cdots,\hat{v}_N)$$

. 故

$$\begin{aligned}
J^1(v,\hat{v}_N,\cdots,\hat{v}_N)&\leq J^1_{\mathrm{MFG}}(\hat{v}_N)+M_5N^{-\frac{1}{n+4}}\\
&\leq J^1(\hat{v}_N)+c_1N^{-\frac{1}{n+4}}.
\end{aligned}$$

□

组员的分工与贡献

本组组员的大致分工如下: 程梓恒完成了 MFG 模型对真实博弈的逼近 (Section 5.1,Section 5.2) 这一部分的证明, 并给出了部分 MFG 的应用场景 (Section 5.5). 冯宣瑞完成了 MFG 中 multi-class(Section 4.2) 及 Linear Quadratic Case (Appendix C) 这两部分内容的推导. 尹顺调查了平均场理论在统计力学中的应用 (Section 2), 并给出了部分 MFG 的应用场景 (Section 5.4, Section 5.6). 唐博文完成了 MFG 中 homogeneous 情形 (Section 4.1) 的证明, 并调查了 MFG 在博弈论中的背景 (Section 1). 此外, 唐博文和尹顺完成了本文的写作, 并对 MFG 理论的证明过程中出现的错误予以纠正.