数学模型 HW 2

Due Date: March 20, 交于教学网.

2022 年 3 月 8 日

鼓励相互讨论，但是请独立完成作业的写作。

1. 教材二，第19页， 1.3。（注意，我们可以在北大图书馆下载到此书的电子版）

2. 教材二，第19页， 1.4。

3. 考虑关于传染病的的 Susceptible-Infected （SI）模型。我们用 u 表示未感染者的数量，v 表示患者数量。他们的时间演化满足如下的模型

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u = B - \mu_u u - r u v, \\ \frac{d}{dt}v = r u v - \mu_v v. \end{cases}$$

这里，$B>0$ 表示出生率，$r>0$ 表示感染系数，$\mu_u>0$ 表示死亡率，$\mu_v>0$ 表示康复率。
a. 找到这个系统的平衡解，和平衡解有实际意义的条件。
b. 定义

$$\bar{u} = \mu_v / r, \quad \bar{v} = \frac{rB - \mu_u \mu_v}{r\mu_v}, \quad \bar{S}(u,v) = -\bar{u}\ln(u) - \bar{v}\ln(v) + u + v.$$

证明

$$\frac{d}{dt}\bar{S} = -\frac{1}{u}(\sqrt{\bar{u}B} - u\sqrt{\bar{v}r + \mu_u})^2.$$

c. 当 $rB \le \mu_u\mu_v$ 时，定义

$$\bar{u}_0 = B/\mu_u, \quad \underline{S}(u,v) = -\bar{u}_0\ln(u) + u + v.$$

证明

$$\frac{d}{dt}\underline{S} = -\frac{v}{\mu_u}\left(\mu_v\mu_u - rB\right) - \frac{1}{\mu_u u}\left(B - \mu_u u\right)^2.$$

d. (附加思考题，不算入成绩) 基于以上对 $\bar{S}$ 和 $\underline{S}$ 的分析，你能得出什么关于这个系统在 $t \to +\infty$ 的结论吗？尝试证明你的结果。

4. 神经元模型。神经元的兴奋性是神经元细胞最重要的性质之一，也是科研的热点问题。对于单个神经元来说，它的最重要的状态变量是动作电位，或称电压，用 $V(t)$ 表示，而它的时间演化满足

$$C\frac{dV}{dt} = I.$$

这里 C 表示细胞膜的电容量，I 表示电流，而电流跟细胞膜上的离子流、电流渗漏等多种机制有关。

历史上有很多关于神经元电压动力学的复杂模型，它们往往维数很高，分析难度很大。1962年，Jin-Ichi Nagumo提出来如下的简化模型

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}v = f(v) - w + I_a, \\ \frac{d}{dt}w = bv - \gamma w, \end{cases} \qquad f(v) = v(a-v)(v-1).$$

这里 $a \in (0,1)$, $b > 0, \gamma > 0$。

（1）当 $I_a = 0$ 时，利用相轨线（相图）分析说明：当 b/γ 充分大时，系统只有唯一的平衡态，且平衡态是稳定的；当 b/γ 充分小时，系统有三个平衡态，其中两个稳定，一个是不稳定的。

（2）如果其他参数不变，已知存在对于 I_a 的某个取值，系统中存在三个平衡态。那么当 I_a 在变化时，系统会出现几次分岔现象？请用相轨图的草图来说明。

5. 考虑下面的常微分方程

$$\dot{x} = ax^m(1-x) - x,$$

其中 $a > 0$ 是方程中的参数。

a. 当 $m = 1$ 时，按照参数的取值分情况讨论系统的不动点的个数和稳定性。

b. 当 $m = 2$ 时，按照参数的取值分情况讨论系统的不动点的个数和稳定性。