数学模型 HW 3

Due Date: April 3, 交于教学网.

2022 年 3 月 21 日

鼓励相互讨论，但是请独立完成作业的写作。

1. 教材二，第40页， 2.4（a）（b）。（注意，我们可以在北大图书馆下载到此书的电子版）

2. 教材二，第40页， 2.6（a）（b）。

3. 从 ρ 和 $\boldsymbol{j}$ 满足的守恒律方程推导出

$$\boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}.$$

注：不可压缩的条件不是必要的。

4. 考虑一维的 Traffic flow equation

$$u_t + (1-u)u_x = 0.$$

如果已知

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x > 2 \text{ or } x < -1 \\ 1+x, & -1 \le x \le 0 \\ 1-\dfrac{x}{2}, & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

a. 对于$0 < t < 1$，利用特征线法求方程的解，并画出$u(x,1)$。

b. 对于$t > 1$，求激波解，并在 $x-t$ 平面画出带激波的特征线图。

5. 城镇和勇士。勇士会从城镇(视为 $x = 0$ 处的一点）出发，按照恒定的速度前往森林中前进，如果用$f(x,t)$ 来表示勇士的密度函数，它满足如下的一阶双曲方程

$$f_t + f_x = 0, \quad x > 0, \quad t > 0.$$

城镇的领主会根据心情指数 $u(t)$ 来决定是否派遣新的勇士，表示为

$$f(0,t) = \begin{cases} 2, & \text{if} \quad u(t) \ge 1, \\ 0, & \text{if} \quad u(t) < 1. \end{cases}$$

而领主的心情指数会根据距离城镇一单位距离内勇士的总数量而改变，表示为

$$\frac{du}{dt} = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad \displaystyle\int_0^1 f(x,t)dx \le 1, \\ -1, & \text{if} \quad \displaystyle\int_0^1 f(x,t)dx > 1. \end{cases}$$

如果初始时刻，已知 $u(0)=0$, 和当 $x>0$ 时 $f(x,0)\equiv 0$。

(a) 当 $0<t<3, 0<x<1$ 时，求解 $f(x,t)$。

(b) $u(t)$ 什么时候开始变成周期函数，基本周期是多少？

6. 在反映扩散方程的行波解问题中:

a. 我们考虑 ignition temperature model。试根据讲义完成下面这个事实的证明：

存在唯一的解 (c^*, v)，使得 $v(x)$ 是一个递减函数，$v(0)=\theta$, 而且 $c^*>0$。这里，$v(0)=\theta$ 可以理解为，为了找到唯一解而选取的可解性条件。

(提示：讲义中已经帮你完成了部分计算，但是有三处细节没有完成：(a). there exists a $c^*>0$; (b). such c^* is unique; (c). the corresponding v function is decreasing. 但是，不要只证明这三个地方，请写出完整的证明。)

b. 我们考虑一个双稳态的模型: For $\theta\in(0,1)$, $\nu>0$ and $\mu>0$,

$$f(\rho)=\begin{cases} -\nu\rho, & 0\le\rho<\theta \\ \mu(1-\rho), & \theta<\rho\le 1. \end{cases}$$

证明存在唯一的解 (c^*, v)，使得 $v(x)$ 是一个递减函数，且 $v(0)=\theta$。

c.（思考题：不算分数）上一问中，是不是一定有 $c^*>0$？