数学模型 HW 4

Due Date: May 1, 交于教学网.

2022 年 4 月 19 日

鼓励相互讨论，但是请独立完成作业的写作。

1. 教材二，第83页， 3.25。（注意，我们可以在北大图书馆下载到此书的电子版）

2. 教材二，第83页， 3.26。

3. Infinite Time Horizon 的最优控制问题。我们考虑一个状态函数 $y(s):[t,+\infty]\to\mathbb{R}$，它的演化满足如下的变化率模型

$$\dot{y}(s)=f(y(s),\alpha(s)),\quad s\in[t,+\infty).$$
$$y(t)=x\in\mathbb{R}^d.$$

这里，$\alpha(s)\in\mathbb{R}$ 是控制函数，我们用 $\mathscr{A}$ 来表示所有可行控制的集合。

考虑如下的收益泛函

$$J_{x,t}(\alpha)=\int_t^{+\infty}e^{-\lambda s}r(y(s),\alpha(s))ds.$$

其中， $r(x,\alpha):\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 代表了过程中的收益，$e^{-\lambda s}$ 表示贴现因子，$\lambda>0$，即未来的收益对于现在来说是有折扣的。注意，与讲义中的假设不同，现在终止时间是在 $t=+\infty$，但是 x 和 t 是变量。

为了找到不同 x 和 t 对应的最佳收益，我们定义此控制问题的价值函数

$$u(x,t)=\sup_{\alpha(\cdot)\in\mathscr{A}}J_{x,t}(\alpha)=\max_{\alpha(\cdot)\in\mathscr{A}}\left[\int_t^{+\infty}e^{-\lambda s}r(y(s),\alpha(s))ds\right].$$

请尝试写出（或者查阅讲义中给出的参考资料）此时的动态规划原理（DPP），无需证明。并推导价值函数 $u(x,t)$ 满足的 Hamilton-Jacobi-Bellman equation。

4. 考虑两点边值问题

$$\begin{cases}\phi''+\lambda\phi=0,\quad 0<x<L,\\ \text{B.C.}:\quad \phi'(0)=0,\quad \phi'(L)=0.\end{cases}$$

求出此问题的所有特征值λ_n和特征函数$\phi_n(x)$。

5. 请参考讲义5.4中薛定谔方程的求解思路，对于形如

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(t)\Psi_n(x)$$

的解，写出系数的表达式

$$c_n(t)=e^{-\frac{iE_nt}{\hbar}}\int_{\mathbb{R}}u_0(x)\Psi_n(x)dx.$$

具体推导过程。并求$G(x,t,x')$，使得

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}}u_0(x')G(x,t,x')dx'.$$

6. a. 利用格林公式和格林函数的如下定义，

$$\begin{cases} \mathscr{L}G(x,x_s)=\delta(x-x_s), \quad a<x<b, \\ G(a,x_s)=0, \quad G(b,x_s)=0. \end{cases} \tag{0.1}$$

证明格林函数是对称的，即

$$G(x_1,x_2)=G(x_2,x_1).$$

b. 考虑$u(x)$满足如下BVP

$$u''(x)=f(x), \quad u(0)=a, \quad u(L)=b.$$

虽然BVP中的边值条件是非齐次的，但是我们仍然按照如下的方式定义格林函数

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2}G(x,x_s)=\delta(x-x_s), \quad 0<x<L, \\ G(0,x_s)=0, \quad G(L,x_s)=0. \end{cases} \tag{0.2}$$

请利用格林公式将BVP的解$u(x)$用格林函数表示出来。