数学模型 HW 5

Due Date: May 15, 交于教学网.

2022 年 5 月 2 日

鼓励相互讨论，但是请独立完成作业的写作。

1. 直接求解下格林函数 $G(x, x_0)$ $(x_0 \in (0, L))$

$$\frac{d^2}{dx^2} G = \delta(x - x_0), \quad 0 < x < L,$$

$$G(0, x_0) = 0, \quad \frac{d}{dx} G(L) + G(L) = 0.$$

2. 不求解 $u(x)$，判断下面的情况中， BVP 有多少解

$$\frac{d^2}{dx^2} u + \gamma u = \sin x.$$

(a) $\gamma = 1$， $u(0) = u(\pi) = 0$.

(b) $\gamma = -1$， $u(0) = u(\pi) = 0$.

(c) $\gamma = 2$， $u(0) = u(\pi) = 0$.

3. 我们在引入格林函数的时候也介绍了 Dirac delta function $\delta(x)$, 这种广义函数在众多科学问题中有应用。考虑如下问题, 对于 $E > 0, \psi(x)$ 满足

$$-\psi'' = (E - \delta(x))\psi$$

我们设方程的解有如下的形式

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx}, & x < 0 \\ Se^{ikx}, & x > 0. \end{cases}$$

不妨设 $k > 0$, 根据方程直接求出 k 的表达式。假设 $\psi(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 根据 delta 函数的性质推导出 $\psi(x)$ 在 $x = 0$ 的另一个条件, 并求出 S 和 R 。

4. 考虑讲义中的两年制学校问题。一个新生到毕业或者退学需要花费时间的均值是多少？

5. （改编自2022年阿里巴巴数学竞赛初赛题）春节期间, 某牛奶公司推出了新春盲盒活动：每盒牛奶都附赠一个“红包”, 其中有下列“虎”，“生”，“威” 中的一款图案。集齐两个“虎”, 一个“生”, 一个“威” 即可拼齐成为“虎虎生威” 全家福。这项活动一经推出, 就成为了网红爆款, 很多人希望能够集齐一整套。假设“虎”，“生”，“威” 三款红包盲盒按均匀概率 $\frac{1}{3}$ 分布, 并且每一个附赠红包中的图案都是独立的。

(a) 子轩每天早晨喝一盒牛奶, 五天内收集齐“虎虎生威” 全家福的概率是多少?

(b) 收集齐一套“虎虎生威” 全家福的数学期望是多少盒牛奶? (提示：参考作业第4题。)

6. 我们引入跟讲义中略微不同的记号。考虑一个马氏链 $\{X_n\}$. 我们记单步转移概率为

$$p(i,j) = \Pr(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

而对于 $m \in \mathbb{N}$, m 步转移概率为

$$p^m(i,j) = \Pr(X_{n+m} = j | X_n = i).$$

利用马氏链的无后效性证明 Chapman-Kolmogorov 方程

$$p^{m+n}(i,j) = \sum_k p^m(i,k) p^n(k,j).$$

（事实上，我们可以用上式证明 m 步转移矩阵是单步转移矩阵的 m 次幂。）