# 数学模型 HW 6

Due Date: May 29, 交于教学网.

2022 年 5 月 15 日

鼓励相互讨论，但是请独立完成作业的写作。

1. （The Black-Scholes Model）假设随机过程 $S_t$ 的演化满足几何布朗运动

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \,\mathrm{d}t + \sigma S_t \,\mathrm{d}W_t$$

这里 $W_t$ 是布朗运动，$\mu, \sigma > 0$ 均是常数。

（1）令 $C(S_t, t)$ 也是一个随机过程，利用 Itô's lemma 计算 $\mathrm{d}C_t$ 的表达式。

（2）令 $B_t = e^{rt}$，其中 $r$ 是常数。考虑随机过程

$$P_t = x_t B_t + y_t S_t,$$

且满足

$$\mathrm{d}P_t = x_t dB_t + y_t \,\mathrm{d}S_t,$$

这里，$x_t$ 和 $y_t$ 待定。

如果我们假设，$C_t = P_t$ 对所有的 $t$ 成立，那么请推导出下面的 Black-Scholes 方程

$$rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = 0.$$

2. 考虑 Ornstein-Uhlenbeck process

$$\mathrm{d}X_t = -aX_t \,\mathrm{d}t + \sigma \,\mathrm{d}W_t. \tag{0.1}$$

这里 $W_t$ 是布朗运动，$a, \sigma > 0$ 均是常数。推导其密度函数满足的 Fokker-Planck 方程（不要直接引用讲义中的结论），并验证此时 Fokker-Planck 方程的平衡态是一个高斯函数。

3. （Feynman-Kac formula）随机微分方程和一些特殊的偏微分方程的解存在联系。例如，考虑随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t) \,\mathrm{d}t + \sigma(X_t) \,\mathrm{d}W_t,$$

和偏微分方程终值问题

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t,x) + b(x)\frac{\partial}{\partial x} g(t,x) + \frac{1}{2}\sigma(x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(t,x) = 0, \quad t < T,$$
$$g(T,x) = f(x).$$

请证明下面的关系成立：

$$\mathbb{E} f(X_T) = \mathbb{E} g(0, X_0).$$

4. 教材二，第105页， 4.1。

5. 教材二，第107页， 4.5。