数学模型 Lecture Notes

Zhennan Zhou

2023 年 5 月 16 日

PRELIMINARY DRAFT. NOT FOR WIDE CIRCULATION.
参考：教材一第6章，教材二第4，6章。

6 无量纲化和渐进分析初步

I think that it is a relatively good approximation to truth — which is much too complicated to allow anything but approximations — that mathematical ideas originate in empirics.

—John von Neumann, *The Mathematician.*

在本章中，我们首先将学习无量纲化，即把有量纲的物理问题转化成无量纲的数学模型。无量纲的参数反映了各种物理效果的相对重要性。在不知道这些无量纲参数的大小时，我们可以通过解析的或者数值的方法求出问题的解。但是，如果我们已知一些无量纲参数是相对的大，或者相对的小，所谓的**渐进方法**可以帮我们求解问题的近似解。

渐进方法提供了一套系统的手段来构造形如下面问题的近似解：

$$F(\boldsymbol{x},\varepsilon)=0, \quad \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=H(\boldsymbol{x},\varepsilon), \quad \text{when} \quad \varepsilon \ll 1. \tag{6.1}$$

这里，ε 叫做渐进参数，我们感兴趣的是 $\varepsilon \ll 1$ 的情形。构造近似解是通过引入**渐进展开**来实现的，即原问题可以分解为一序列的子问题。子问题往往更容易求解，而且我们可以把子问题的解组合成原问题的近似解。

注意，虽然以上的步骤听起来很像线性叠加原理，但事实上，渐进方法的强大之处在于它可以处理很多的非线性问题。

6.1 量纲分析*

量纲分析（dimensional analysis）是20世纪提出的在物理和工程等领域建立数学模型的一种方法，它在经验和实验的基础上利用物理定律的量纲齐次原则，确定各物理量之间的关系。

许多物理量是有量纲的。在物理研究中，我们把若干物理量的量纲作为**基本量纲**，它们是相互独立的。另外一些物理量的量纲则可以根据定义或者物理定律有基本量纲推导出来，称为**导出量纲**。

例如，**在研究力学问题的时候，通常将长度l，质量m，时间t的量纲作为基本量纲**，记以相应的大写字母L，M和T。（这也叫 MKS 系统，指Meters、Kilograms，Seconds。）

在量纲分析中，物理量q的量纲记作$[q]$。于是我们有

$$[l]=L, \quad [m]=M, \quad [t]=T.$$

而速度v和加速度a的量纲可以按照其定义表示为

$$[v] = LT^{-1}, \quad [a] = LT^{-2}.$$

力的量纲则应该根据牛顿第二定律得出

$$[f] = LMT^{-2}.$$

有些物理常数也有量纲，如在万有引力定律

$$f = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

中的引力常数$k = fr^2(m_1)^{-1}(m_2)^{-1}$。$k$的量纲计算得到

$$[k] = LMT^{-2}L^2M^{-2} = L^3M^{-1}T^{-2}.$$

对于无量纲的量λ，我们记 $[\lambda] = L^0M^0T^0 = 1$。

用数学公式表示一些物理量之间的关系时，**公式等号两端必须有相同的量纲，称为量纲齐次性**（dimensional homogeneity）。

我们立刻得到如下的推论：含物理量的数学公式中，任何非单项式的复杂函数，例如 sin, exp, tan, log 等，必须有无量纲的自变量。例如，在指数函数 e^X 中，由 Taylor series，我们知道

$$e^X = 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n + \cdots$$

如果 X 不是无量纲的，那么 Taylor 展开中的各项的量纲必然不同，因此也违反了量纲齐次性。所以，根据量纲齐次性，X^n 和 1 有相同的量纲，即 X 是无量纲的。

例子：匀加速运动。 我们考虑一个竖直发射的导弹，y 为导弹的高度，初始高度为 y_0，t 为时间，v_0 为初始速度，a_0 为常值加速度，那么，导弹的轨迹方程可以表达成

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2.$$

从量纲的角度，我们也能看出，方程的每一项有相同的量纲：

$$[\text{length}] = [\text{length}] + \left[\frac{\text{length}}{\text{time}}\right][\text{time}] + \left[\frac{\text{length}}{\text{time}^2}\right][\text{time}^2].$$

例子：单摆运动。质量为m的小球，系在长度为l的线的一端，稍偏离平衡位置后，在重力mg作用下作往复运动。忽略阻力，求摆动周期T的表达式。

问题中的出现的物理量有t, m, l, g。设他们之间的关系是

$$t = \lambda m^{\alpha_1} l^{\alpha_2} g^{\alpha_3},$$

这里，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是待定常数，$\lambda$是无量纲的比例系数。它的量纲表达式为

$$[t] = [m]^{\alpha_1}[l]^{\alpha_2}[g]^{\alpha_3}.$$

讲$[t] = T, [m] = M, [l] = L, [g] = LT^{-2}$代入得

$$T = M^{\alpha_1} L^{\alpha_2+\alpha_3} T^{-2\alpha_3}.$$

按照量纲其次原则，我们得到解为

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{2}.$$

于是我们得到

$$t=\lambda\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

这和我们用物理知识得到结果$2\pi\sqrt{l/g}$是一致的，不过我们无法通过量纲分析得到$\lambda=2\pi$，因为2π是无量纲的。

我们注意，这个结果可以写成

$$t^2l^{-1}g=\pi_1.$$

这里，π_1是一个无量纲量。

我们将上述的过程一般化，就是著名的白金汉 π 定理 (Buckingham Pi theorem)。

π 定理 设m个有量纲的的物理量 $q_1,q_2,\cdots,q_m$之间存在与量纲单位的选取无关的物理规律，数学上可以表示为

$$f(q_1,\cdots,q_m)=0. \tag{6.2}$$

若基本量纲记作$X_1,\cdots,X_n$（我们假设$n\le m$），而$q_1,q_2,\cdots,q_m$的量纲可表示为

$$[q_j]=\Pi_{i=1}^n X_i^{a_{ij}},\quad j=1,\cdots,m.$$

矩阵$A=(a_{ij})_{n\times m}$ 称为量纲矩阵。若A的秩 Rank$A=r$，设齐次方程组

$$Ay=0,\quad y=(y_1,\cdots,y_m)^T$$

的$m-r$个基本解记作 $y^{(s)}$, $s=1,\cdots,m-r$，则存在$m-r$个相互独立的无量纲量

$$\pi_s=\Pi_{j=1}^m q_j^{y_j^{(s)}},\quad s=1,\cdots,m-r. \tag{6.3}$$

且（理论上）存在未定的函数关系

$$F(\pi_1,\cdots,\pi_{m-r})=0. \tag{6.4}$$

我们并不关注π定理的证明，而是关心它的应用。我们先来讨论 π 定理的一些数学上的推论：

1. 为了方便分析，我们会对数学模型进行无量纲化（下一节会详细介绍）。经过无量纲化的系统的解，只会依赖于无量纲化的自变量和 $m-r$ 个相互独立的无量纲量。

2. 如果 π_j 是无量纲的话，那么它们的任意函数，例如 $h(\pi_1)$，$g(\pi_1,\pi_2)$ 也是无量纲的。由此可见，无量纲参数是不唯一的。

3. 对于未定的函数关系，$F(\pi_1,\cdots,\pi_{m-r})=0$，很多时候隐函数定理是适用的，也就是说，我们可以局部地把一个无量纲量写成其他无量纲量的函数，比如

$$\pi_1=g(\pi_2,\cdots,\pi_{m-r}).$$

例子：匀加速运动。 回顾之前例子的分析，我们知道，轨线方程是关于时间 t 的二次函数，我们不妨将它设为

$$at^2+bt+c=0.$$

这里 $c=y_0-y$ 是位移差，$b=v_0$ 而 $c=\frac{1}{2}a_0$。之前我们已经知道了这四个物理量的量纲

$$[t]=T,\quad [a]=L/T^2,\quad [b]=L/T,\quad [c]=L.$$

由于，这里只有两个基本量纲，我们容易验证，这个系统中有2个相互独立的无量纲量。(练习)

下面我们演示如何从量纲分析的角度，把时间 t 写成其他几个物理量的表达式。在选取无量纲量时，我们可以令其中一个跟时间有关，而另一个与时间无关。比如

$$\pi_1 = at/b, \quad \pi_2 = ac/b^2.$$

根据 π 定理，我们知道，这些无量纲量可以被某种函数关系联系在一起

$$F(\pi_1, \pi_2) = 0.$$

假设可以使用隐函数定理，那么上式关系也可以记为

$$\pi_1 = f(\pi_2),$$

因而，我们得到了

$$t = \frac{b}{a} f\left(\frac{ac}{b^2}\right).$$

这样，我们就把时间用其他几个参数表达了出来。

为了验证上述表达是否正确，我们考虑直接用二次函数的求根公式，得

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b}{a}\left(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{1 - 4\frac{ac}{b^2}}\right).$$

所以，我们使用 π 定理得到的结论的确是对的，但是我们无法通过量纲分析得到 $f(\pi_2)$ 的具体形式。

最后我们指出，量纲分析是有局限的，不彻底的

- 无量纲量之间的关系无法用量纲分析得出。
- 存在多个无量纲量的时候，恰当的选择无量纲量是关键。
- 需要正确的选择物理量和基本量纲。

例子：原子弹爆炸的能量估计 根据爆炸时间 t 和蘑菇云半径 r 的多组观测来估计原子弹的能量。

相关物理量：半径 r，时间 t，能量 E，空气密度ρ，大气压 P。

要寻求的关系:

$$f(r, t, E, \rho, P) = 0.$$

取长度 L，质量 M 和时间 T 作为基本量纲。上述各物理量的量纲为

$$[r] = L, \quad [t] = T, \quad [E] = L^2MT^{-2}, \quad [\rho] = L^{-3}M, \quad [P] = L^{-1}MT^{-2}.$$

于是我们得到量纲矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

易知，$\mathrm{Rank}A = 3$，存在 2 个无量纲量。我们通过求解“选取”下面两个无量纲量

$$\pi_1 = r\left(\frac{\rho}{t^2E}\right)^{\frac{1}{5}}, \quad \pi_2 = \left(\frac{t^6P^5}{E^2\rho^3}\right)^{\frac{1}{5}},$$

且存在某种函数关系使得 $F(\pi_1,\pi_2)=0$。

如果我们假设，$\pi_1=\psi(\pi_2)$，则可以推出

$$r=\left(\frac{t^2E}{\rho}\right)^{\frac{1}{5}}\psi\left(\frac{t^6P^5}{E^2\rho^3}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

但是，ψ 的形式需要采取其他方式确定。

下面我们考虑短时大爆炸近似：原子弹爆炸的时间短，能量大。于是我们近似的有

$$\pi_2=\left(\frac{t^6P^5}{E^2\rho^3}\right)^{\frac{1}{5}}\approx 0.$$

所以，如果我们记 $\psi(0)=\lambda$，则我们近似于的有

$$r=\lambda\left(\frac{t^2E}{\rho}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

借助一些小型爆炸试验，我们取 $\lambda=1$。于是我们得到能量的近似估计

$$E=\frac{\rho r^5}{t^2}.$$

6.2 无量纲化

在一个有量纲的模型中，模型中变量是有量纲的，模型的解也通常依赖于多个带量纲的参数。如果对数学模型进行**无量纲化**，那么模型的解只会依赖于无量纲化的自变量和少数几个相互独立的无量纲量。（参考上一节的白金汉 π 定理，如果问题中有 m 个物理量，r 是量纲矩阵的秩，那么有 $m-r$ 个相互独立的无量纲量。）

我们直接通过一个例子来介绍这种方法。

例子：抛射问题 在星球表面以初速v竖直向上发射火箭，记星球半径为r，星球表面的重力加速度为g，忽略阻力，讨论发射高度随时间t的变化规律。

设x轴竖直向上，在发射时刻$t=0$火箭高度$x=0$（星球表面）。火箭和星球的质量分别是m_1和m_2，则由牛顿第二定律和万有引力定律可得

$$m_1\ddot{x}=-k\frac{m_1m_2}{(x+r)^2}.$$

以$x=0$时，$\ddot{x}=-g$代入，得到抛射问题满足如下方程

$$\begin{cases}\ddot{x}=-\dfrac{r^2g}{(x+r)^2},\\ x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=v.\end{cases}\tag{6.5}$$

它的解可以表示为 $x=x(t;r,v,g)$。即发射高度 x 是时间 t 的函数，又依赖于 r,v,g 等参数。

这个发射高度的表达式包含了3个独立参数。用无量纲化的方法可以减少独立参数的个数，达到简化模型的效果。**无量纲化是指：对于变量 x 和 t 分别构造具有相同量纲的参数组合 x_c 和 t_c，使新变量**

$$\bar{x}=\frac{x}{x_c},\quad \bar{t}=\frac{t}{t_c}$$

为无量纲量。 x_c 称特征长度，t_c 称特征时间，统称**特征尺度（Characteristic Scale）**或参考尺度。

特征尺度 x_c 和 t_c 由参数 r,v,g 构成，并与 x 和 t 有相同的量纲。这样的 x_c 和 t_c 有多种构造方法。下面举两个例子：

- （从星球的视角选择特征）令$x_c = r, t_c = r v^{-1}$，则

$$\bar{x} = \frac{x}{r}, \quad \bar{t} = \frac{t}{r v^{-1}}.$$

  于是我们得到

$$\begin{cases} \varepsilon \ddot{\bar{x}} = -\dfrac{1}{(\bar{x}+1)^2}, \quad \varepsilon = \dfrac{v^2}{rg} \\ \bar{x}(0) = 0, \quad \dot{\bar{x}}(0) = 1. \end{cases} \tag{6.6}$$

  它的解可以表示为 $\bar{x} = \bar{x}(\bar{t};\varepsilon)$，它只含一个独立参数 ε，易证明 ε 是无量纲的。

- （从近地抛射物的角度选择特征）令 $x_c = v^2 g^{-1}, t_c = v g^{-1}$，于是我们得到

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}} = -\dfrac{1}{(\varepsilon\bar{x}+1)^2}, \quad \varepsilon = \dfrac{v^2}{rg} \\ \bar{x}(0) = 0, \quad \dot{\bar{x}}(0) = 1. \end{cases} \tag{6.7}$$

我们会发现，由于特征尺度不同，两种无量纲化的方程有不同的“渐进”行为。(形式上理解为 $\epsilon \to 0$ 时方程的解行为。)

我们假设火箭发射的初速度 v 满足

$$v \ll \sqrt{rg} \approx 8000 m/s.$$

所以，$\varepsilon = v^2/rg \ll 1$。既然，$\varepsilon$ 如此之小，能不能舍弃 ε 的高阶项，从而得到方程的近似解呢？

在方程(6.6)中，令 $\varepsilon = 0$，则我们的得到

$$0 = -\frac{1}{(\bar{x}+1)^2}, \quad \bar{x}(0) = 0, \quad \dot{\bar{x}}(0) = 1.$$

显然我们的得到的方程无解，因此不能在方程(6.6)中直接舍弃含 ε 的项。

在方程(6.7)中，令 $\varepsilon = 0$，则我们的得到

$$\ddot{\bar{x}} = -1, \quad \bar{x}(0) = 0, \quad \dot{\bar{x}}(0) = 1.$$

显然我们得到的解为

$$\bar{x}(\bar{t}) = -\frac{\bar{t}^2}{2} + \bar{t}.$$

带回原变量 x 和 t，上述式子等价于

$$x(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v t. \tag{6.8}$$

不难看出，如果原抛射问题中假定：火箭发射过程中所受的星球引力可以被近似为 $m_1 g$，那么微分方程简化为

$$\ddot{x} = -g, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v. \tag{6.9}$$

不难看出方程(6.9)的解就是(6.8)。通过对比(6.5)和(6.9)，我们得到，因为发射高度 $\ll$ 星球半径,所以(6.9)是(6.5)的近似方程。

但是，通过比较(6.6)和(6.7)，我们发现，只有选择了正确的特征尺度，我们才能够忽略含 ε 的项，成功得到原方程的近似解。在下面的章节中，我们也会看到，如果特征尺度选择不合适，我们也可以使用“尺度调节”的方式，使得方程有良好的渐进表现。

注意，无量纲化是用数学工具研究物理问题时常用的方法。恰当的选择特征尺度不仅可以减少独立参数的个数，而且可以帮助人们决定舍弃哪些次要因素。无量纲化的话的关键是选择合适的特征尺度，而这也需要物理知识、经验观察和数学分析的综合运用。

6.2.1 偏微分方程的无量纲化举例 薛定谔方程*

考虑带有物理量纲的薛定谔方程

$$i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_{xx}\psi + V(x)\psi.$$

我们定义特征长度为x_c, 特征时间为t_c, 则新变量

$$\bar{x} = \frac{x}{x_c}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_c}$$

为无量纲量。令$\bar{\psi}(\bar{x},\bar{t}) = \psi(x,t)$, 那么，原方程可以改写成

$$i\hbar\frac{1}{t_c}\partial_{\bar{t}}\bar{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2mx_c^2}\partial_{\bar{x}\bar{x}}\bar{\psi} + V(x)\bar{\psi}.$$

如果等式两边乘以$(t_c)^2(x_c)^{-2}m^{-1}$, 我们得到

$$i\left(\frac{\hbar t_c}{mx_c^2}\right)\partial_{\bar{t}}\bar{\psi} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\hbar t_c}{mx_c^2}\right)^2\partial_{\bar{x}\bar{x}}\bar{\psi} + \frac{t_c^2}{mx_c^2}V(\bar{x}x_c)\bar{\psi}.$$

容易验证

$$\bar{V}(\bar{x}) = \frac{t_c^2}{mx_c^2}V(\bar{x}x_c)$$

是无量纲的势能函数，而（$\hbar = 1.05\times 10^{-34}m^2kg/s$）

$$\varepsilon = \frac{\hbar t_c}{mx_c^2}$$

也是无量纲的，称为semi-classical parameter。于是，我们最终推出无量纲的薛定谔方程（为了简便，我们扔掉所有的"bar"）

$$i\varepsilon\partial_t\psi = -\frac{\varepsilon^2}{2}\partial_{xx}\psi + V\psi.$$

6.3 渐近展开

首先我们回顾一些微积分中一些有关极限的定义和理解。注意，下面一些定义的名称也许会和数学分析中的略有不同。

- $f(\varepsilon)$ 和 $g(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon\to 0$ 时被称为是渐进等价的，如果

  $$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 1.$$

  我们记作 $f\sim g$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时。注意，渐进等价关系方便我们表示一类等价的函数，例如在 $\varepsilon\to 0$ 时，$\cos(\sqrt{\varepsilon})\sim(1-\varepsilon/2)\sim(1+\varepsilon)\sim e^{\varepsilon}$.

- 在 $\varepsilon\to 0$时，$f = O(g)$，如果存在有限的 A，使得对于足够小的 ε 有

  $$|f|\le A|g|.$$

  这使得我们方便更精确地刻画极限值有限、极限值为无穷时的函数的渐进行为，例如$f = O(1)$, $f = O(\varepsilon^{-1})$, $f = O(\varepsilon^2)$。

- 在 $\varepsilon\to 0$时，$f = o(g)$，如果

  $$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 0.$$

  我们常用 $o(\cdot)$ 表示高阶小项。

下面我们引入**渐近展开**。考虑函数 $x(t,\varepsilon)$，它有如下“分离变量”类型的级数展开

$$x(t,\varepsilon)=\delta_0(\varepsilon)x_0(t)+\delta_1(\varepsilon)x_1(t)+\delta_2(\varepsilon)x_2(t)+\cdots \tag{6.10}$$

这里，我们假设所有的系数 $x_n=O(1)$（至少当 t 在一定范围内），而度规函数 $\{\delta_n(\varepsilon)\}$ 满足下面的序列关系

$$\delta_0(\varepsilon)\gg\delta_1(\varepsilon)\gg\delta_2(\varepsilon)\gg\cdots \tag{6.11}$$

我们称 (6.10) 和 (6.11) 为渐进展开 (Asymptotic expansion, AE) 的基本形式。在 AE 中的第一项被称为首项（或首阶项），而我们显然有，$x\sim\delta_0x_0$。

关于，对于 AE 的理解，我们需要注意下面几个方面

1. 对于简单的渐进展开，我们通过求 Taylor 级数得到。
2. 对于一般的情况，度规函数不一定是由 ε^n 组成。此时，我们需要同时求解度规函数和系数。
3. （可能是最反直觉的一点）渐近展开中的级数有可能是发散的。但是在 $\varepsilon\ll1$ 时，其部分和仍然可能提供了很精确的近似。

为了理解渐近展开的第三条性质，我们考虑下面的例子。如下的积分

$$I(\varepsilon)=\int_0^\infty\frac{e^{-t}}{1+\varepsilon t}dt, \tag{6.12}$$

在很多积分变换和特殊函数中非常常见。（如有兴趣了解更多，请参考教材二。）

如果我们对 (6.12) 中的被积函数进行 Taylor 展开，然后通过积分，我们就会得到如下渐进展开

$$I(\varepsilon)\sim1-\varepsilon+2\varepsilon^2-6\varepsilon^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n!\varepsilon^n. \tag{6.13}$$

我们不难验证，这个级数的收敛半径为 0，换句话说，这个级数对于所有的 $|\varepsilon|>0$ 都是发散的。但是在图 [1] 中，我们又观察到，在 ε 较小时，部分和对真实值的逼近效果是非常好的。从图 [1] 中，我们也观察到，对于 $\varepsilon=0.1$ 时，前 10 项左右的部分和的逼近效果是最好的。

总结来看的话，渐进展开在 $\varepsilon\to0$ 时总是精确的，但是对于有限大小的 ε, 存在能够减少误差的最优截断。而事实上，在多数情况下，渐进展开的前几项和已经能够给出很好的逼近了。渐近展开的逼近理论很多时候跟 $\varepsilon\to0$ 和 $n\to\infty$ 这两个极限的关系有关。本门课中，我们不细究逼近理论，而是着重于学习如何用这套方法近似地解方程。

6.4 渐进展开的计算

我们希望构造形如 (6.1) 中问题的渐近展开解。我们先考虑形如 $F(x,\varepsilon)=0$ 的代数方程。这时候，渐近展开 (6.10) 中的系数 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 只是常数，即

$$x(\varepsilon)=\delta_0(\varepsilon)x_0+\delta_1(\varepsilon)x_1+\delta_2(\varepsilon)x_2+\cdots$$

在 $\varepsilon\to0$ 的极限下，问题的解，按照其渐近展开的形式，一般可以分成如下几类

- Regular（非奇异） solutions. $\lim_{\varepsilon\to0}x=x_0$，即解有限的极限。如果 $x_0\neq0$，则首项的度规函数 $\delta_0=1$。
- Vanishing solutions. $\lim_{\varepsilon\to0}x=0$，即解的极限为 0。此时，首相的度规函数 $\delta_0\ll1$。

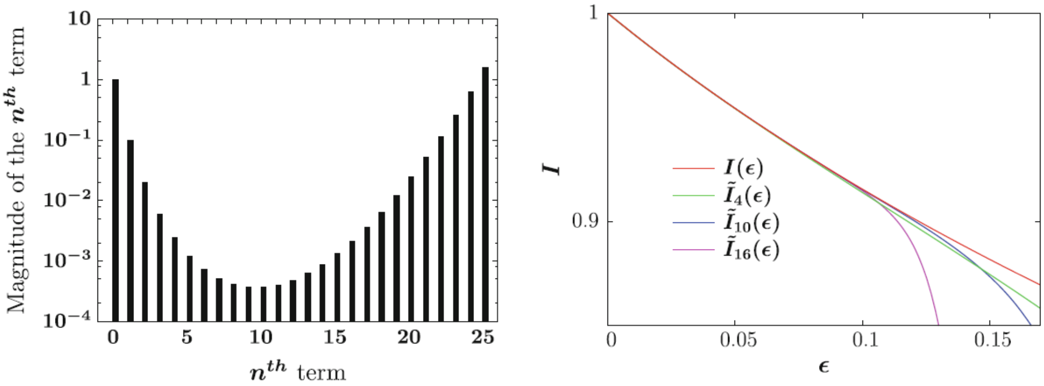

图 1: 左图: $\varepsilon = 0.1$ 时，各阶项的大小。右图：部分和和真实值的比较。

- Singular（奇异） solutions. $\lim_{\varepsilon\to 0}|x| = \infty$。我们一般认为这种情况对应了有限大小的 x_0 而 $\delta_0(\varepsilon) \gg 1$。

下面，我们介绍构造渐进展开解的两种方法：展开法和迭代法。

考虑如下的二次方程

$$x^2 - x + \frac{1}{4}\varepsilon = 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{6.14}$$

它的精确解是

$$X_A = \frac{1+\sqrt{1-\varepsilon}}{2}, \quad X_B = \frac{1-\sqrt{1-\varepsilon}}{2}.$$

我们通过 Taylor 展开得到

$$X_A = 1 - \frac{1}{4}\varepsilon - \frac{1}{16}\varepsilon^2 + \cdots = O(1), \tag{6.15}$$

$$X_B = 0 + \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{16}\varepsilon^2 + \cdots = O(\varepsilon). \tag{6.16}$$

我们注意到当 $\varepsilon \ll 1$ 时，方程 (6.14) 可以近似看成是 $x^2 - x \approx 0$，于是有 $x \approx 0, 1$。也就是说，方程 (6.14) 的前两项的平衡决定了解的大体位置，而第三项只是稍微修改了解的值。

这是一个典型的 regular（非奇异）微扰（或称摄动，perturbation）问题，在 $\varepsilon \to 0$ 时，只有良定义的非奇异解。对这个问题，我们已经知道了解的所有信息，现在我们以这个问题为例，介绍这两种方法。

展开法

在不知道精确解的情况下，我们假设，解是非奇异的，并且 $\delta_n = \varepsilon^n, n = 0, 1, \cdots$，于是我们相当于假设解具有下面的形式

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots \tag{6.17}$$

将 (6.17) 代入 (6.14)，得

$$(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots)^2 - (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots) + \frac{1}{4}\varepsilon = 0.$$

按照 ε 的幂函数的阶数分类，我们得到

$$\left(x_0^2 - x_0\right) + \varepsilon\left(2x_0 x_1 - x_1 + \frac{1}{4}\right) + \varepsilon^2\left(x_1^2 + 2x_0 x_2 - x_2\right) + \cdots = 0.$$

我们假设所有的系数都是 $O(1)$ 的，那么，为了使每一阶 ε^n 的系数平衡，我们依次得到下面的方程组

$$O(\varepsilon^0): \quad x_0^2 - x_0 = 0, \tag{6.18}$$

$$O(\varepsilon^1): \quad 2x_0x_1 - x_1 + \frac{1}{4} = 0, \tag{6.19}$$

$$O(\varepsilon^2): \quad x_1^2 + 2x_0x_2 - x_2 = 0\cdots \tag{6.20}$$

$$\tag{6.21}$$

通过依次求解，我们得到

$$x_0 = 1, x_1 = -\frac{1}{4}, x_2 = -\frac{1}{16}\cdots \quad \text{or} \quad x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{16}\cdots$$

对照精确解可以验证，我们得到了原问题两个解的渐进展开。

展开法非常简单，但是非常依赖于对解的假设。例如下面的问题

$$(x-1)^2 - 9\varepsilon = 0, \tag{6.22}$$

就不能通过展开法求解。显然，此问题的精确解是 $x = 1 \pm 3\sqrt{\varepsilon}$，并不满足我们对度规函数的假设。

迭代法

不同于展开法，迭代法不再假设渐近展开的形式，而系数和度规函数都是（依次）待定的。这里我们先做两个基本假设

- 每个非平凡的解（平凡解是 $x \equiv 0$，即所有的 $x_n = 0$）的首项是非平凡的：$x_0 \neq 0$ 且 $\delta_0 \neq 0$。
- 首项的系数是有限的，即在 $\varepsilon \to 0$ 时 $x_0 = O(1)$。

我们还是以 (6.14) 为例，先设 $x \sim x_0\delta_0(\varepsilon)$，代入方程得

$$x_0^2\delta_0^2 - x_0\delta_0 + \frac{1}{4}\varepsilon = 0. \tag{6.23}$$

我们认为此方程中不是所有的项都是同样重要的，否则这也不是一个微扰问题了。为了近似求解此方程，我们使用如下的**主项平衡原理（principle of dominant balance）**：方程中的一些项为主项，它们的平衡给出领阶方程；剩下的项是次要项，它们在 $\varepsilon \to 0$ 时是主项的高阶小量。如果这种平衡存在，我们也把它称为 distinguished limit。

显然，在(6.23)中，如果主项只有一项的话，只有无解或者平凡解的情况，如果主项是全部三项的话，方程也是无解的。（想想为什么，请大家自己完成练习。）

对于主项有两项的情况，我们考虑下面三种可能性（注意，由于系数都是 $O(1)$ 的，我们要先保证阶数的匹配）

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \text{Term (1,2)}: \quad \delta_0^2 = \delta_0 \quad \Rightarrow \quad \delta_0 = 1 \\
&\text{(b)} \quad \text{Term (1,3)}: \quad \delta_0^2 = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \delta_0 = \sqrt{\varepsilon} \\
&\text{(c)} \quad \text{Term (2,3)}: \quad \delta_0 = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \delta_0 = \varepsilon
\end{aligned}$$

下面，我们要继续验证，是不是余下的项是不是真的是次要项。容易发现，(b) 违反了主项平衡原理，而 (a) 和 (c) 是两个合理的主项平衡（我们也说，(a) 和(c) 是 distinguished limits）。

而对于 (a) 和 (c)，我们可以进一步的通过领阶方程得到首项系数 x_0，即

$$(a): \quad x \sim 1, \qquad (c): \quad x \sim \frac{1}{4}\varepsilon.$$

我们发现，(a) 和 (c) 分别对应了精确解 x_A 和 x_B，即 $x_A \sim 1$，$x_B \sim \frac{1}{4}\varepsilon$。

更高阶的项可以通过重复上述的步骤得到，得到寻找主项平衡（或称distinguished limits）找到度规函数 $\delta_i(\varepsilon)$ 并找到对应的系数 x_i。但是要注意，依次找到的度规函数需要满足渐进的序列关系。例如，对于 x_B, 在求得了 $x_B \sim \frac{1}{4}\varepsilon$ 之后，可以依次地假设并求解

$$x_B \sim \frac{1}{4}\varepsilon + \delta_{1B}x_{1B}, \quad x_B \sim \frac{1}{4}\varepsilon + \delta_{1B}x_{1B} + \delta_{2B}x_{2B}\cdots$$

在逐项求解中，除了要注意逐项平衡原理，还应该注意 $\varepsilon \gg \delta_{1B} \gg \delta_{2B}$。

回到问题 (6.22)，虽然展开法不再好用，但是使用迭代法，我们可以依次得到 $x \sim x_0\delta_0(\varepsilon) + x_1\delta_1(\varepsilon)$。这里度规函数为 $\delta_0 = 1$，$\delta_1 = \sqrt{\varepsilon}$，而系数为 $x_0 = 1, 1$，$x_1 = \pm 3$。而更高阶项的系数只有 $x_i = 0, i = 2, 3, \cdots$。（练习）

6.5 ODE 问题的非奇异展开

我们可以讲展开法和迭代法推广到 ODE 和 PDE 问题中。需要注意的是，跟上一节的代数方程不同，对微分方程问题解求渐进展开的时候，在每一阶中，我们需要确定一个方程，而不只是一个常数，即

$$x(t,\varepsilon) = \delta_0(\varepsilon)x_0(t) + \delta_1(\varepsilon)x_1(t) + \delta_2(\varepsilon)x_2(t) + \cdots$$

我们回顾上一章节学习的抛射问题，在无量纲化之后，我们可以得到如下的含参数的 ODE 初值问题

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{(1+\varepsilon x)^2}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = \alpha.$$

注意，这里的初值条件跟上一章中略有不同，但是所有的参数都是无量纲的。我们考虑 $\varepsilon \to 0$ 的情形，利用展开法，假设有如下的渐进展开形式

$$x(t) \sim x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots.$$

下一步要将这个展开形式代入方程和初值条件中。

ODE 的左端部分如下

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x_0''(t) + \varepsilon x_1''(t) + \varepsilon^2 x_2''(t) + \cdots.$$

对于 ODE 的右端，我们先按照 ε 对其展开

$$-\frac{1}{(1+\varepsilon x)^2} = -1 + 2\varepsilon x - 3\varepsilon^2 x^2 + \cdots$$

然后我们利用这个展开形式将右端进一步展开

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -1 + 2\varepsilon\left(x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots\right) - 3\varepsilon^2\left(x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots\right)^2 + \cdots \\ &= -1 + \varepsilon(2x_0) + \varepsilon^2\left(2x_1 - 3x_0^2\right) + O(\varepsilon^3).\end{aligned}$$

我们也对初值进行渐进展开，从而推导出 x_n 满足的初值条件：

$$\begin{aligned} x(0) = 1 \quad &\Rightarrow \quad x_0(0) + \varepsilon x_1(0) + \varepsilon^2 x_2(0) + \cdots = 1 + \varepsilon 0 + \varepsilon^2 0 + \cdots \\ x'(0) = \alpha \quad &\Rightarrow \quad x_0'(0) + \varepsilon x_1'(0) + \varepsilon^2 x_2'(0) + \cdots = \alpha + \varepsilon 0 + \varepsilon^2 0 + \cdots. \end{aligned}$$

这样，我们就可以把原 ODE 问题按照 ε 的阶数，分解成了若干的子问题

$$\begin{aligned} &O\left(\varepsilon^0\right): \quad x_0'' = -1, \quad x_0(0) = 1, \quad x_0'(0) = \alpha; \\ &O\left(\varepsilon^1\right): \quad x_1'' = 2x_0, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0; \\ &O\left(\varepsilon^2\right): \quad x_2'' = 2x_1 - 3x_0^2, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2'(0) = 0; \quad \cdots \end{aligned}$$

我们注意到，高阶问题依赖于低阶问题的解，所以我们可以由低到高地依次求解子问题。

我们先求解 $O\left(\varepsilon^0\right)$ 的问题，就会得到领阶问题的解

$$x_0(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \alpha t + 1.$$

将 x_0 代入$O\left(\varepsilon^1\right)$ 的问题，就会得到

$$x_1'' = -t^2 + 2\alpha t + 2, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0.$$

求解此子问题，我们得到

$$x_1(t) = -\frac{1}{12}t^4 + \frac{\alpha}{3}t^3 + t^2.$$

类似地，我们可以求解更高阶的子问题。

于是，我们可以将渐近展开的解整合成如下的形式

$$x(t) = \left(-\frac{1}{2}t^2 + \alpha t + 1\right) + \varepsilon\left(-\frac{1}{12}t^4 + \frac{\alpha}{3}t^3 + t^2\right) + O(\varepsilon^2).$$

作为本节的结束，我们考虑如下的问题：当我们对 ODE 求渐进展开解的时候，是否这个渐进展开对于所有的 t 都成立呢？这个答案显然是否定的。例如，在这个例子中，当 $t = O(1/\sqrt{\varepsilon})$ 时，

$$O(x_0) = O(\varepsilon x_1) = O(1/\varepsilon).$$

这时候，我们渐进展开的假设已经被违反了。这种渐进展开的破缺，往往伴随了问题中一个新的尺度的出现。我们在下一节的奇异微扰问题中，会进一步讨论这个问题。

6.6 奇异微扰问题

如果问题的一个或者多个解在 $\varepsilon \to 0$ 时表现出奇异（发散）的行为，那么这样的问题是奇异微扰问题。

如果我们用非奇异的问题的渐进展开来求解奇异的问题时，奇异解是无法得到的，于是只能得到原问题的部分解，甚至什么解都得不到。

这种行为在所有类别的奇异微扰问题中是普遍存在的：

- 对于代数方程来说，如果一个 N 阶多项式在 $\varepsilon \to 0$ 时，它的领阶方程退化为了一个 M ($M < N$) 阶的多项式，那么这是一个奇异微扰问题，而方程只有 M 个非奇异解。
- 对于微分方程来说，如果在 $\varepsilon \to 0$ 时出现了高阶导数的消失，那么领阶方程的解一般不能满足所有的初值或者边值条件。
- 在其他一些情况中，$\varepsilon = 0$ 时的领阶问题会和原问题 ($\varepsilon > 0$时) 有更本质的不同，比如，一个奇异的 PDE 问题退化成 ODE 问题，一个奇异的 ODE 问题退化问代数方程问题，甚至一个方程组退化成一个方程。

事实上，奇异的解并没有真的丢失掉，而是可以通过适当的尺度调节 (rescaling) 将它们复原出来。换句话说，尺度的选择，和渐近展开的形式决定了你能得到什么样的解。

我们还是先以一个可以直接求解的例子来来演绎尺度条件的方法。考虑在 $\varepsilon \to 0$ 时，如下的代数方程

$$\varepsilon x^2 - 2x + 1 = 0. \tag{6.24}$$

如果我们直接将 $\varepsilon=0$ 代入的话，就得到了

$$-2x+1=0 \quad \Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

可见，领阶方程只有一个根，而原问题有两个根。利用求根公式，我们知道，

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-\varepsilon}}{\varepsilon}.$$

于是，我们直接得到两个根的渐进展开

$$x_A\sim\frac{2}{\varepsilon}-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{8},\quad x_B\sim\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon^2}{16}.$$

我们观察，领阶方程只能得到非奇异解 x_B 的首项，而 x_A 在 $\varepsilon\to 0$ 时是发散的，并不能被非奇异的渐近展开表示出来。

我们讲这两个根的首项代回原方程，得到

$$x_A:\quad \varepsilon\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2-2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)+1=0,\quad x_B:\quad \varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\left(\frac{1}{2}\right)+1=0.$$

这使得我们可以进一步观察差别的原因。

我们注意到，这两个解对应了不同的主项平衡。对于 x_A 来说，前两项是主项，而对于 x_B 来说，后两项是主项。而如果解非奇异，我们也会得到后两项是主项，这对应了 x_B 的确是非奇异解。

下面我们介绍处理奇异解的系统步骤：

1. 令 $x=\delta_0(\varepsilon)X$，并代入原问题。

2. 根据主项平衡原理选取 $\delta_0(x)$（包括验证被忽略的项的确是次要项）。考虑所有 $\delta_0(x)$ 的可能性，这对应了原问题的所有非奇异解和奇异解。

3. 对于给定的 $\delta_0(x)$，得到关于 X 的非奇异扰动问题。利用非奇异扰动问题的方法求解。（展开法或者迭代法。）

4. 通过 δ_0 的调整，得到 x 解的最终形式。

下面我们通过上面的例子来演示这个方法。将 $x=\delta_0(\varepsilon)X$ 代入 (6.24)，我们得

$$\varepsilon\delta_0^2X^2-2\delta_0X+1=0. \tag{6.25}$$

对于主项有两项的情况，我们考虑下面三种可能性（注意，由于系数都是 $O(1)$ 的，我们要先保证阶数的匹配）

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad \text{Term (1,2)}:\quad \varepsilon\delta_0^2=\delta_0 \quad\Rightarrow\quad \delta_0=1/\varepsilon\\
&\text{(b)}\quad \text{Term (1,3)}:\quad \varepsilon\delta_0^2=1 \quad\Rightarrow\quad \delta_0=1/\sqrt{\varepsilon}\\
&\text{(c)}\quad \text{Term (2,3)}:\quad \delta_0=1 \quad\Rightarrow\quad \delta_0=1.
\end{aligned}$$

容易验证，case (b) 并不满足主项平衡原理，应该舍去。而 case (a) 和 (c) 满足主项平衡原理，期中 case (c) 对应了非奇异解，case (a) 对应了奇异解。我们下面只看奇异解的情况。将 $x=X/\varepsilon$ 代入原问题，得到调整尺度后的非奇异问题

$$X^2-2X+\varepsilon=0.$$

下面我们用展开法，设 $X(\varepsilon)$ 满足如下的渐进展开形式

$$X \sim X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2.$$

将这个展开代入方程，其首阶部分为

$$X_0^2 - 2X_0 = 0.$$

它的解为 $X_0 = 0$ 和 $X_0 = 2$。我们舍掉平凡的情况，$X_0 = 0$，而只考虑 $X_0 = 2$。这样我们就得到了奇异解的首项

$$x_A \sim 2/\varepsilon.$$

我们可以比较一下迭代法和这里介绍的尺度调节法的相同与不同。相同点是，他们都需要需要寻找首项的度规函数 δ_0，各阶的系数也是一样的。（原因可以由下面的展开容易看出。）

不同的地方是，迭代法是依次的求解度规函数和系数，最终解可以表示为

$$x \sim \delta_0 x_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \cdots$$

而尺度调节法是把整个问题转化成另外一个非奇异的微扰问题 $X(\varepsilon)$，下一步可以用迭代法或者展开法得到

$$X(\varepsilon) \sim X_0 + \tilde{\delta}_1 X_1 + \tilde{\delta}_2 X_2 + \cdots$$

而经过整合后，则有

$$x \sim \delta_0 \left(X_0 + \tilde{\delta}_1 X_1 + \tilde{\delta}_2 X_2 + \cdots \right).$$

其实对于代数方程来说，差别并不大……但是对于微分方程来说，尺度调节法往往更适用。

6.7 ODE 奇异扰动问题的例子

最后我们看一个 ODE 奇异扰动问题的例子。回顾一下第二章学习的一个简单的酶催化的化学反应过程

$$S + E \underset{k_1}{\overset{k_2}{\leftrightarrows}} C \xrightarrow{k_3} P + E. \tag{6.26}$$

这里的 S 是底物 ("substrate" reactant) 的浓度，P 是最终产物的浓度，E 来表示酶的浓度，C 是中间产物的浓度。

根据质量作用定律，我们得到反应速率方程组

$$\frac{dP}{dt} = k_3 C, \quad \frac{dC}{dt} = k_1 SE - k_2 C - k_3 C.$$

$$\frac{dC}{dt} = -k_1 SE + k_2 C, \quad \frac{dE}{dt} = -k_1 SE + k_2 C + k_3 C.$$

我们进一步假设，最初系统里只有底物和酶，因为，我们给出如下的初值

$$S(0) = S_0, \quad E(0) = E_0, \quad C(0) = 0, \quad P(0) = 0.$$

利用质量守恒律，我们容易推出 $E(t) = E_0 - C(t)$。再对系统进行无量纲化，我们可以得到无量纲化的初值问题（练习）

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= -s(1-c) + \lambda c, & s(0) &= 1, \\
\varepsilon\frac{dc}{dt} &= +s(1-c) - \mu c, & c(0) &= 0, \\
\frac{dp}{dt} &= (\mu - \lambda)c, & p(0) &= 0.
\end{aligned}$$

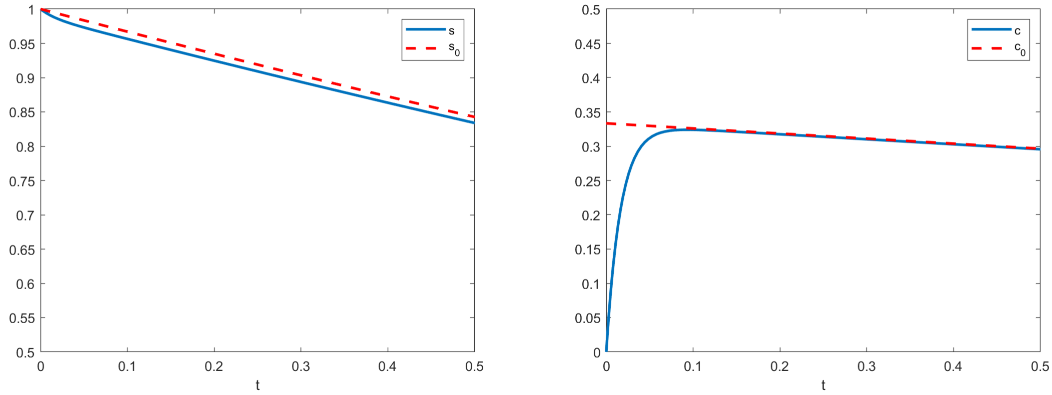

图 2: $\varepsilon = 0.1$ 时，真解和“拟稳态”解的比较。蓝色实线：真解；红色虚线：拟稳态解。

这里我们对无量纲参数有如下的假设

$$\varepsilon = \frac{E_0}{S_0} \ll 1, \quad \lambda = \frac{k_2}{k_1 S_0} = O(1), \quad \mu = \frac{k_2 + k_3}{k_1 S_0} = O(1).$$

这个假设说明，初始时刻酶的量远小于底物的量。注意，s 和 c 的方程并不依赖于 p，所以我们不妨只考虑 s 和 c 的初值问题。

在 $\varepsilon \to 0$ 时，这是一个奇异微扰问题，因为 c 的方程会从一个一阶微分方程退化成一个代数方程。我们先假设方程的解满足非奇异的展开

$$s(t) = s_0(t) + O(\varepsilon), \quad c(t) = c_0(t) + O(\varepsilon).$$

将展开代入原问题，我们得到如下的领阶方程

$$\frac{ds_0}{dt} = -s_0(1 - c_0) + \lambda c_0, \quad 0 = s_0(1 - c_0) + \mu c_0.$$

而且我们容易得到首项的初值条件

$$s_0(0) = 1, \quad c_0(0) = 0.$$

显然，这个初值条件和领阶方程中的代数方程是矛盾的。所以直接的非奇异的展开并不能帮我们求解此问题。

事实上，c 的方程由微分方程退化成代数方程对应了所谓的“拟稳态”（quasi-steady state）。我们可以认为，$c_0(t)$ 由 $s_0(t)$通过代数方程

$$c_0 = \frac{s_0}{s_0 + \mu}$$

决定，再将 c_0 的表达式带入微分方程，得

$$\frac{ds_0}{dt} = -\frac{(\mu - \lambda)s_0}{s_0 + \mu}. \tag{6.27}$$

这样我们就得到了著名的米氏酶动力学方程。另外的，右端这种形如

$$f(x; v, k) = \frac{vx}{k + x}$$

的函数被称为米氏函数。

在这样的“拟稳态”动力学过程中，s_0 满足自己独立的动力学方程，而 $c_0(t)$ 的值完全由 $s_0(t)$ 的值决定。如上的分析似乎告诉我们应该把这个“拟稳态”的问题的初值条件修正成

$$s_0(0) = 1, \quad c_0(0) = \frac{1}{1 + \mu}.$$

事实上，“拟稳态”近似在 $t\approx 0$ 时是不成立的，因为当 $t=0$ 时，$\frac{dc}{dt}=O(\varepsilon^{-1})$，所以如果不进行尺度调节，我们将无法捕捉**反应初期快尺度的动力学行为**。

6.7.1 快时间尺度和初始层（内部解）

为此，我们引入快变的时间变量 $\sigma=\frac{t}{\varepsilon}$，并引入快尺度下的状态变量函数

$$\sigma=\frac{t}{\varepsilon},\quad S(\sigma)=s(\sigma\varepsilon),\quad C(\sigma)=c(\sigma\varepsilon).$$

于是我们得到尺度调节后的系统

$$\begin{aligned}\frac{dS}{d\sigma}&=\varepsilon\left(-S(1-C)+\lambda C\right), &\qquad S(0)=1,\\ \frac{dC}{d\sigma}&=+S(1-C)-\mu C, &\qquad C(0)=0.\end{aligned}$$

我们对它做非奇异的渐进展开，得领阶部分 $S\sim S_0$，$C\sim C_0$ 满足

$$S_0(\sigma)\equiv 1,\quad C_0(\sigma)=\frac{1-e^{-(1+\mu)\sigma}}{1+\mu}.$$

注意到，

$$\lim_{\sigma\to\infty}S_0=1,\quad \lim_{\sigma\to\infty}C_0=\frac{1}{1+\mu}.$$

即有

$$\lim_{\sigma\to\infty}S_0(\sigma)=s_0(0),\quad \lim_{\sigma\to\infty}C_0(\sigma)=c_0(0).$$

我们称系统在时间尺度 t 下的解为该奇异扰动问题的外部解，在时间尺度 σ 下的解为内部解。我们注意到，这两个渐进解在 $\sigma=\infty$ 和 $t=0$ 时恰好匹配了。

6.7.2 常微分方程中的平均法（averaging method）

在上面例子中，我们引入了“拟稳态”的概念和它带来的模型约化（如果忽略初始层的影响，我们构造一个二维ODE系统的一维ODE逼近）。这种模型约化的方法叫做常微分方程的平均法（averaging method）。

最后，我们介绍常微分方程平均法的一般形式。考虑如下的ODE系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,y), \tag{6.28}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\varepsilon}g(x,y). \tag{6.29}$$

在这个系统中，x 是慢变量，y 是快变量。在 $\varepsilon\ll 1$ 时，我们有可能推导出只含慢变 x 量的逼近方程。

首先，从快变量 y 的角度来看，我们假设当 x 固定时，y 会充分快地收敛到它的拟稳态，表示为 $y\to\eta(x)$。这里显然有 $g(x,\eta(x))=0$。这里充分快的意思是存在一个时间尺度 (比如 $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$) 使得在这个时间尺度下，慢变量 x 的改变可以无限小，而快变量 y 又可以离 $\eta(x)$ 无限接近。那么，我们期待，这个系统的（领阶）慢变量动力学可以写成

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=f(X,\eta(X)).$$

米氏酶动力学方程就是如上的慢变量动力学的特例。

事实上，我们可以使用平均法对上述的快慢变量的ODE系统进行渐进展开。我们假设“拟稳态”可以表示出一个关于 x 的图像，$y=\Psi(x)$，且图像函数有如下的渐进展开

$$\Psi(x)=\Psi_0(x)+\varepsilon\Psi_1(x)+\mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

如果在时间演化过程中 $x(t), y(t)$ 一直被渐进地吸引在集合 $y=\Psi(x)$ 附近，那么

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\nabla\Psi(x(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

也就是，我们有

$$\frac{1}{\varepsilon}g(x,\Psi(x))=\nabla\Psi(x(t))f(x,\Psi(x)).$$

我们对上式做渐近展开，并按照 ε 的阶数收集各项，得

$$\begin{aligned}\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right):&\quad g(x,\Psi_0(x))=0,\\ \mathcal{O}(1):&\quad \nabla_y g(x,\Psi_0(x))\Psi_1(x)=\nabla\Psi_0(x(t))f(x,\Psi_0(x)).\end{aligned}$$

结合前面得拟稳态假设，我们取 $\Psi_0(x)=\eta(x)$。进一步，我们假设 $\nabla_y g(x,\eta(x))$ 是可逆的，那么我们可以解出

$$\Psi_1(x)=\left(\nabla_y g(x,\eta(x))\right)^{-1}\nabla\eta(x)f(x,\eta(x)).$$

我们再对 f 在 $y=\Psi(x)$ 时做渐近展开，得

$$f(x,\Psi(x))=f(x,\Psi_0(x))+\varepsilon\nabla_y f(x,\Psi_0(x))\Psi_1(x)+\mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

综上，我们得到慢变量动力学的渐进展开式

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=F_0(X)+\varepsilon F_1(X).$$

$$F_0(x)=f(x,\eta(x)),\qquad F_1(x)=\nabla_y f(x,\eta(x))\left(\nabla_y g(x,\eta(x))\right)^{-1}\nabla\eta(x)f(x,\eta(x)).$$

更高级的尺度调节法、渐进分析方法（例如均质化，homogenization）和收敛性分析超出了本课的内容范围。感兴趣的同学欢迎参阅教材二的第7，8，9，10章。另外，也可以参考下面的教材

【1】https://www.amazon.com/Advanced-Mathematical-Methods-Scientists-Engineers/dp/0387989315/ref=la_B001IQUJ56_1_1?s=books&ie=UTF8&qid=1522077321&sr=1-1

【2】https://link.springer.com/book/10.1007/978-0-387-73829-1