第一章

※ 微分方程基础与 Fourier 分析

○ 二阶方程的分类 $u(x,y)$

$$a u_{xx} + b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y + f u = g$$

$b^2 - 4ac$ 的判别：

- <0 椭圆 eg. $u_{xx} + u_{yy} = g$
- $=0$ 抛物 eg. $u_t = \beta u_{xx}$ $(\beta > 0)$
- >0 双曲 eg. $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

注：1. 方程性质不同，数值技巧也不同.

2. grad ∇ $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T$

   div $\nabla\cdot$ $\nabla \cdot (f_1 \cdots f_n) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$

   $\Delta = \text{div grad} = \nabla\cdot\nabla = \nabla^2$ $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}$

- 椭圆方程 e.g. $\nabla u = f$

  模型：平衡态，优化问题的稳态

  建模：优化(Euler-Lagrange) 或受力分析(牛二)

  一般形式 (一) $Lu = f$ + 边界条件 (B.C.). 即 B.V.P.

- 抛物方程

  一般形式 $u_t = Lu - f$

  + 初值条件 (I.C) + 边值条件 B.C.

  注：若稳态存在，$u_t = 0 \Rightarrow Lu = f$

- 双曲方程

  一阶双曲系统 $u_t + A u_x = 0$

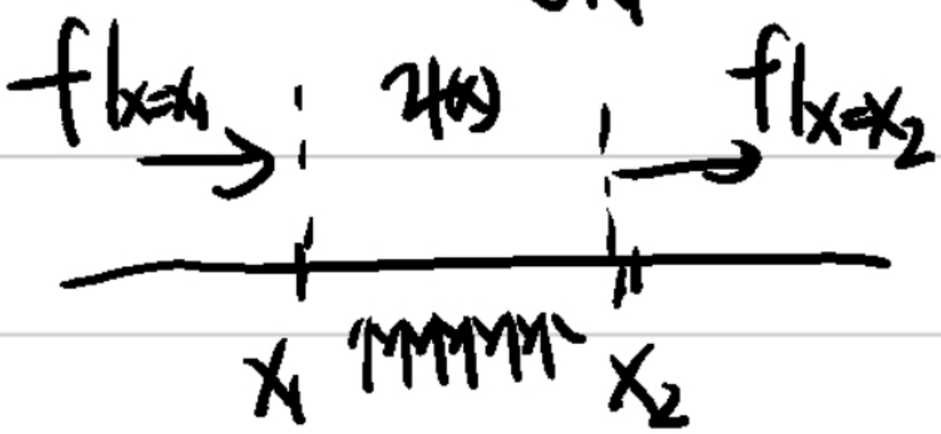
  $u \in \mathbb{R}^m$ $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 可对角化，特征值 $\in \mathbb{R}$

e.g. $\begin{bmatrix} P \\ u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & K_0 \\ \rho_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ u \end{bmatrix}_x = 0$

$\Rightarrow \quad P_{tt} = c^2 P_{xx}$，其中 $c^2 = K_0/\rho_0$

○ 守恒律角度 $u(x,t)$ 密度函数

改变 $\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)\,dx$ 的原因



$\begin{cases} \text{通量 } f \\ \text{源 } Q \end{cases}$

可得方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = Q$

e.g. 1. $f = ua$，$a = \text{const}$ $Q \equiv 0$

对流 $u_t + a u_x = 0$ $u(x,t) = u(x-at, 0)$

2. $f = -\beta u_x$ $\beta > 0$ $Q = 0$

扩散 $u_t = \beta u_{xx}$

0 线性方程的 Fourier Analysis

观察：① $\partial_x e^{ikx} = ik e^{ikx}$

因为 $W_j = e^{ijkh}$, $j=\sqrt{-1}$, $h=\text{const}$

定义 $D_0 W_j = \frac{1}{2h}(W_{j+1} - W_{j-1})$

则 $D_0 W_j = \frac{1}{2h}(e^{i(j+1)kh} - e^{i(j-1)kh})$

$= \frac{1}{2h}(e^{ikh} - e^{-ikh}) e^{ijkh}$

$= \frac{i}{h}\sin(kh) W_j$

即：e^{ikx} 是 ∂_x 与差分算子的特征函数

用于 Von Neumann 分析，修正方程分析

令 $V(x) \in L^2$，即 $\|V\|_{L^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} |V(x)|^2 dx$ 有限

Def. Fourier transform $\hat{V}(\xi)$

$$\hat{V}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x) e^{-i\xi x} dx$$

$$V(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{V}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad \text{(inverse)}$$

满足 $\|V\|_{L^2} = \|\hat{V}\|_{L^2}$ (Parseval relation)

注: $V(x)$ 是 $e^{i\xi x}$ 的线性组合, 系数 $\propto \hat{V}(\xi)$

o 应用在 PDE 上.

$u(x,t)$, $x,t \in \mathbb{R}$ $u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\xi,t) e^{i\xi x} d\xi$

$$u_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_t(\xi,t) e^{i\xi x} d\xi$$

$$u_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi\, \hat{u}(\xi,t) e^{i\xi x} d\xi$$

例1. $u_t + a u_x = 0 \qquad u(x,0) = \eta(x)$

Fourier $\hat{u}_t + a i\xi \hat{u} = 0$

$\hat{u}(\xi,t) = e^{-i\xi at}\hat{\eta}(\xi)$ 衰减

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi at}\hat{\eta}(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\eta}(\xi)\, e^{i\xi(x+at)}\, d\xi$$

$$= \eta(x+at)$$

例2. $u_t = \beta u_{xx} \qquad u(x,0) = \eta(x)$

$\hat{u}_t = -\beta\xi^2\hat{u}$

$$\hat{v}(\xi,t) = e^{-\beta\xi^2 t}\hat{v}(\xi) \qquad \text{“耗散”}$$

指数衰减，高频衰减更快，“光滑”效应

例3. $u_t = u_{xxx}$ 色散方程

$$\hat{u}_t = -i\xi^3\hat{u}$$

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-i\xi^3 t}\hat{\eta}(\xi)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\eta}(\xi)e^{i\xi(x-\xi^2 t)}d\xi$$

$\hat{\eta}(\xi)e^{i\xi(x-\xi^2 t)}$，速度与

ξ不同，速度不同，随演化色散开

✡ 椭圆型偏微分方程 §1.1

二阶 一般形式 $u(x_1,\cdots,x_n)$

$$Lu \triangleq \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c\right)u = \pm f$$

椭圆性: $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha(x)\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$

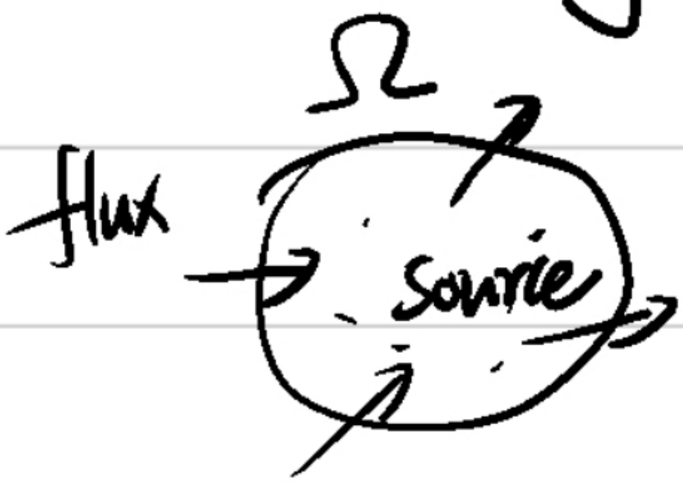
$\forall\ \xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ $\alpha(x)>0$ $\forall x\in\Omega$

一致椭圆性: $\inf\limits_{x\in\Omega}\alpha(x)=\alpha>0$

eg. Poisson $-\Delta u=f$

推广: 2n阶, 方程组, 非线性.

e.g. 定常对流，扩散 f: source



$$flux = \underline{\underline{-a\nabla u}} + \underline{u\vec{v}}$$

扩散　对流 → 流速

$$-\nabla\cdot(a\otimes\nabla u - u\vec{v}) = f$$

- 边界条件　$\partial\Omega$　n 是外法向
  - 第一类　$u = u_D$　Dirichlet
  - 第二类　$\frac{\partial u}{\partial n} = g$　Neumann
  - 第三类　$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g$　Robin

混合边界条件：不同部分不同种

差分方法解椭圆型BVP（边值问题）

S1 引入网格，定义网格节点上的网格函数

S2 微分 → 差分 + 离散B.C.

S3 求解代数方程组

记号：$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{N}$　$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 多重指标、

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

$$\partial_i u = u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \partial_x u = u_x = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\partial_x^2 u = u_{xx} = \frac{\partial y}{\partial x^2}.$$

模型问题 §1.2

- Poisson 方程 Dirichlet BVP

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y), & \forall (x,y) \in \Omega = (0,1)\times(0,1) \\ u(x,y) = u_D(x,y) & \forall (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

(S1)

- 取空间步长 $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{N} = h$
- 网格线 $x_i = i\Delta x$, $y_j = j\Delta y$

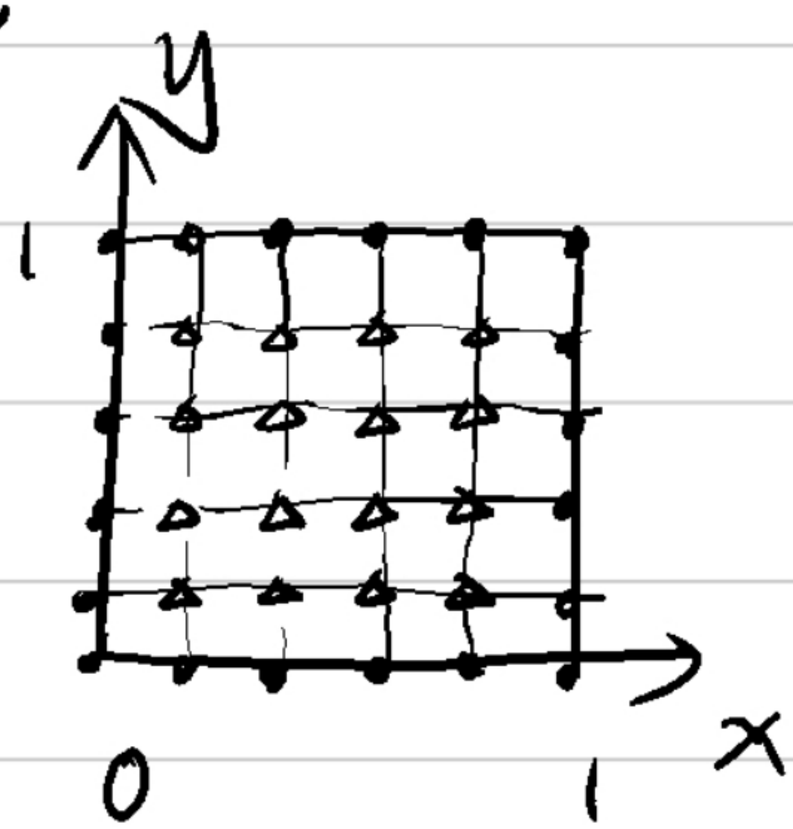
$$i,j = 0, \cdots, N$$

- 节点指标集

$$J = \{(i,j) : (x_i, y_j) \in \bar{\Omega}\}$$

边界 J_D 内点 J_Ω

节点 (i,j) u_{ij} f_{ij} U_{ij}



(52) $L = \Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$

Poisson方程的五点差分格式 $\forall (ij) \in J_\Omega$

$$-L_h U_{ij} \triangleq \frac{4U_{ij} - U_{i-1,j} - U_{i+1,j} - U_{i,j-1} - U_{i,j+1}}{h^2} = f_{ij}$$

$$U_{ij} = u_D(x_i, y_j), \quad \forall (ij) \in J_D$$

(53) 可得 $(N-1)\times(N-1)$ 阶线性方程组 $AU = F$

可证，系数矩阵对称正定，解唯一

○ 误差分析 令误差 $e = \{e_{ij}\} = \{U_{ij} - u_{ij}\}$

注意 $-L_h U_{ij} = f_{ij} \quad \forall (ij) \in J_\Omega$ --①

但 $-L_h u_{ij} \neq f_{ij}$

令 $-L_h u_{ij} = f_{ij} - T_{ij} \quad \forall (ij) \in J_\Omega$ --②

① - ② 得 $-L_h e_{ij} = T_{ij} \quad \forall (i,j) \in J_\Omega$

进一步 $T_{ij} = L_h u_{ij} + f_{ij}$

$= L_h u_{ij} - (Lu)_{ij}$ (由原方程)

$= [(L_h - L)u]_{ij}$ (L_h 线性)

截断误差算子 $T = L_h - L$

$T_h = \{T_{ij}\}_{(i,j) \in J_\Omega}$ 局部截断误差

反映了, 差分方程 → 微分方程
差分算子 → 微分算子
} 的逼近程度

Def: 差分格式 (与微分方程) 是相容的

如果, 对分充分光滑的解, 满足相容性条件

$$\lim_{h \to 0} \|T_h\|_\infty = \lim_{h \to 0} \max_{(i,j) \in J_\Omega} |T_{ij}| = 0$$

角 五点差分格式 $\|T^h\|_\infty = O(h^2)$ 二阶精度

○ 稳定性与收敛性 (椭圆问题)

一般地，差分格式 $A^h U^h = F^h$

U^h 真解节点值 $A^h \tilde{U}^h = F^h - T^h$

$A^h E^h = T^h$ $\|T^h\| \xrightarrow{h\to 0} 0$

收敛性 $\|E^h\| \to 0$ 当 $h \to 0$

$E^h = (A^h)^{-1} T^h$

则 $\|E^h\| = \|(A^h)^{-1} T^h\| \le \|(A^h)^{-1}\| \|T^h\|$

希望 $\|(A^h)^{-1}\| \le C$, 当 h 充分小.

考虑 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^\infty}$

Lemma. $\begin{cases} -L_h U_{ij} = f_{ij} & (i,j) \in J_\Omega \\ U_{ij} = u_D(x_i, y_j) & (i,j) \in J_D \end{cases}$

存在与 h 无关的 C. s.t. $\forall$ 右端项 f_{ij} 和边值条件 $(u_D)_{ij}$, 都有差分方程解满足

$$\max_{(i,j)\in J} |U_{ij}| \le C\left(\max_{(i,j)\in J_\Omega} |f_{ij}| + \max_{(i,j)\in J_D} |(u_D)_{ij}| \right)$$

Proof: (1) 注意若 $L_h \bar{U} \ge 0$ (至值意网格函数

则有 $\bar{U}_{ij} \le \frac{1}{4}(\bar{U}_{i-1,j} + \bar{U}_{i+1,j} + \bar{U}_{i,j+1} + \bar{U}_{i,j-1})$

则有 (2) $\max_{(i,j)\in J_\Omega} \bar{U}_{ij} \le \max_{(i,j)\in J_D} \bar{U}_{ij}$ ⊛

(3) 若 ⊛ "=" 成立, 则 $\bar{U} \equiv$ const.

(即 L_h 有最大值性, 证明练习)

(2) 令 $\phi(x,y) = (x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2$

$L_h \phi_{ij} = \cdots = 4$

当 $(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$ 时, $0 \le \phi \le \frac{1}{2}$

又令 $F = \max_{(i,j)\in J_h} |f_{ij}| \quad (\ge 0)$

取 $\bar{v}_{ij} = v_{ij} + \frac{1}{4}F\bar{v}_{ij}$

则 $L_h \bar{v}_{ij} = L_h v_{ij} + F = -f_{ij} + F \ge 0$

则 $v_{ij} \le v_{ij} + \frac{1}{4}F\bar{v}_{ij} \quad (\bar{v} \ge 0)$

$\le \max_{(i,j)\in J_h} |(u_h)_{ij}| + \frac{1}{8}F \quad (由(4))$

再取 $\bar{v}_{ij} = -v_{ij} + \frac{1}{4}F\bar{v}_{ij}$, 可得

$-v_{ij} \le \max_{(i,j)\in J_h} |(u_h)_{ij}| + \frac{1}{8}F$, 即证.

回顾 $-\Delta_h e_{ij} = T_{ij} \quad \forall (i,j) \in J_\Omega$

则 $\|e\|_{L^\infty} \le \max_{(i,j)\in J_D} |e_{ij}| + \frac{1}{8}\|T\|_{L^\infty}$ (稳定性)

再由相容性，知 $\|e\|_{L^\infty} = O(h)$ (收敛性)

- L^2 意义下的稳定性.

回顾 $A^h E^h = T^h \quad \|T^h\| \xrightarrow{h\to 0} 0$

$$\|E^h\| = \|(A^h)^{-1} T^h\| \le \|(A^h)^{-1}\| \, \|T^h\|$$

若 A 对称， $\|A\|_{L^2} = \rho(A) \triangleq \max|\lambda^p|$ (最大特征值)

则 $\|A^{-1}\|_{L^2} = \rho(A^{-1}) = (\min|\lambda^p|)^{-1}$

易验证，我们可以显式地计算 A^h 的谱半径

对于五点差分格式 (例)

$P,k=1,2,\cdots$ 特征根 $\lambda^{P,k}=-\frac{2}{h^2}\left(\cos(P\pi h)-1+\cos(k\pi h)-1\right)$

特征向量 $U_{ij}^{P,k}=\sin(P\pi ih)\sin(k\pi jh)$

显然，A_h 正定，最小特征值

$$\lambda^{11}=2\pi^2+O(h^2)\qquad h\to 0$$

则 $\rho(I-A_h\gamma)\approx 1-2\pi^2\gamma\qquad h\to 0$

所以，五点差分格式 L^2-稳定

☆ 一般问题的差分逼近 §13

Ω 有界开集 $\partial\Omega$ 边界

网格: $\vec{j}$ 节点 $\vec{j}=(j_1,\cdots,j_n)$, h 最大步长

J 节点指标集

J_Ω 边界 --- J_Ω 内部 ---

网格函数 U U_j 节点取值

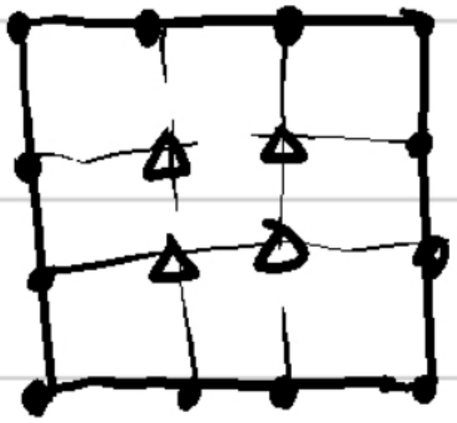
差分算子 L_h ($\approx L$)

$D_{L_h}(j)$ $L_h U_j$ 所用网格点的集合

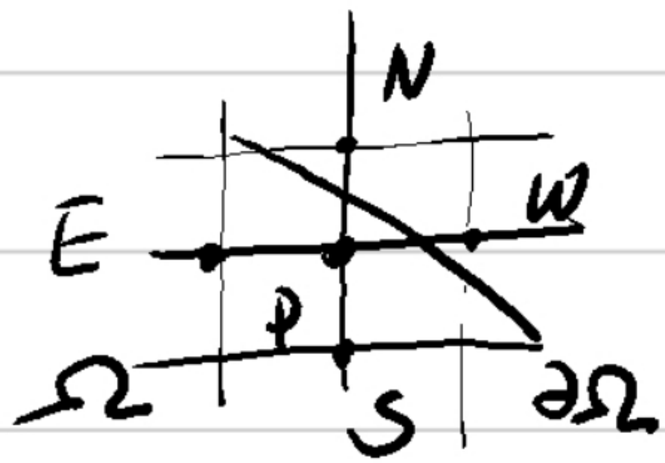
若 $D_{L_h}(j)\subset\overline{J}_\Omega$, 则 j 是 L_h 的正则内点,

正则内点集, 记为 $\mathring{J}_\Omega$

非正则内点集 $\hat{J}_\Omega=J_\Omega\setminus\mathring{J}_\Omega$



$\tilde{J}_\Omega = \phi$



$P \in \tilde{J}_\Omega$

- 差分格式的构造

例 对流-扩散 定常 $\Omega \subset R^2$, $\forall (x,y) \in \Omega$

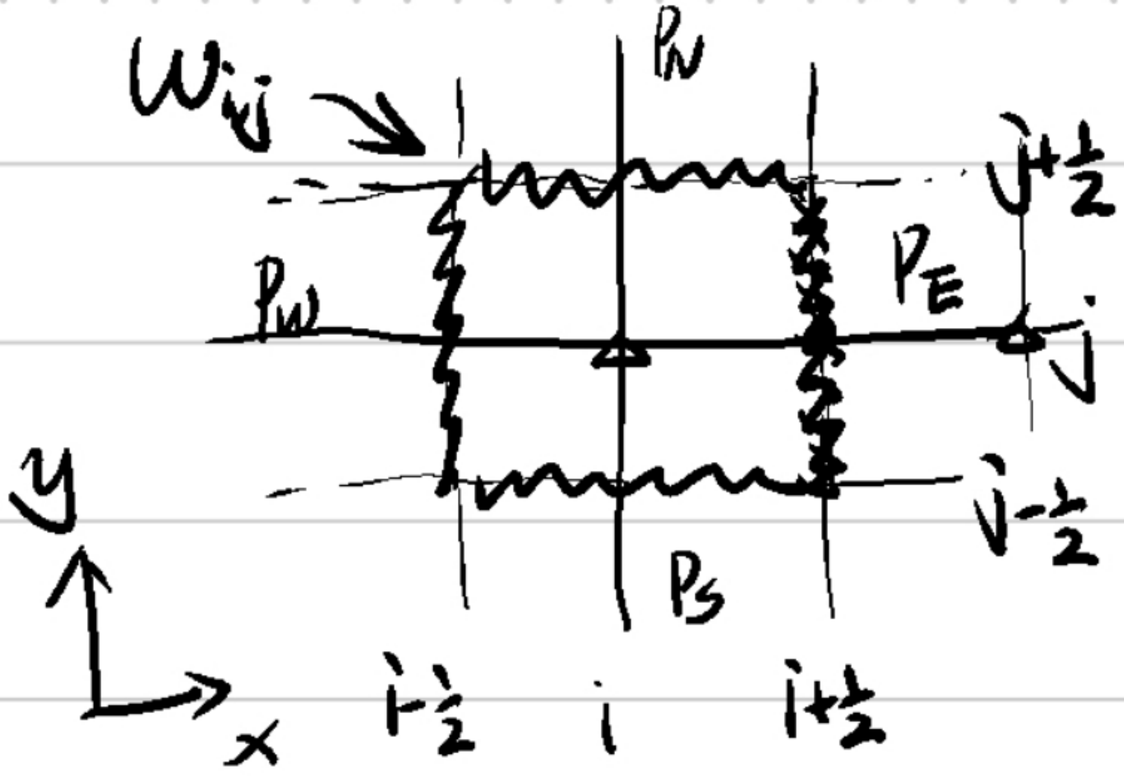
$$-\nabla\cdot(a(x,y)\nabla u(x,y)) + \nabla\cdot(u(x,y)\vec{v}(x,y)) = f(x,y)$$

法一：直接离散 见 (1.3.9)

法二：有限体积法，广义差分法、积分插值法

在控制体 $w \subset R^2$ 上积分得

$$-\int_{\partial w} a\nabla u\cdot\hat{n}\,ds + \int_{\partial w} u\vec{v}\cdot\hat{n}\,ds = \int_w f\,dxdy$$



on P_E $x=(i+\frac{1}{2})\Delta x$, $y\in[(j-\frac{1}{2})\Delta y,(j+\frac{1}{2})\Delta y]$

$\hat{n}=(1,0)$ $\nabla u\cdot\hat{n}=\partial_x u$

$$\int_{P_E} a\nabla u\cdot\hat{n}\,ds$$

$$=\int_{(j-\frac{1}{2})\Delta y}^{(j+\frac{1}{2})\Delta y} a(x_{i+\frac{1}{2}},y)\,\partial_x u(x_{i+\frac{1}{2}},y)\,dy$$

$$\approx a_{i+\frac{1}{2},j}\,\partial_x u(x_{i+\frac{1}{2}},y_j)\,\Delta y$$

$$\approx a_{i+\frac{1}{2},j}\,\frac{U_{i+1,j}-U_{ij}}{\Delta x}\,\Delta y$$

$$\int_{P_E} u\vec{v}\cdot\hat{n}\,ds=\int_{(j-\frac{1}{2})\Delta y}^{(j+\frac{1}{2})\Delta y} u(x_{i+\frac{1}{2}},y)\,V'(x_{i+\frac{1}{2}},y)\,dy$$

$$\approx \frac{U_{i+1,j}+U_{ij}}{2}\,V'_{i+\frac{1}{2},j}\,\Delta y$$

$$\int_w f\,dx\,dy\approx \sum_{ij} w_{ij}\Delta x\Delta y,\ \text{整理得}\ (1.3.12)$$

0 相容性，稳定性，收敛性 （$\tau=j$ 简写）

边值问题
$$\begin{cases} -Lu(x)=f(x) & \forall x\in\Omega \\ Gu(x)=g(x) & \forall x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{1.3.B}$$

差分格式 $-L_h v_j = f_j, \quad \forall j\in J$

记 $\overline{L}u(x)=\begin{cases} Lu(x) & x\in\Omega \\ Gu(x) & x\in\partial\Omega \end{cases}$

定义 设(1.3.13)的解光滑，令

$$T_j u = L_h u_j - (\overline{L}u)_j, \quad \forall j\in J$$

$T_j(u)$ 局部截断误差 $T_h(u)=\{T_j(u)\}_{j\in J}$ 截断误差

定义：相容　$\lim_{h\to 0}\|T_h w\| = 0$

定义：稳定　$\exists$ 范数 $\|\cdot\|$，与步长无关的 K

s.t. $\forall$ 网格函数 f_1, f_2，相应差分方程的解

U_1, U_2 有　$\|U_1 - U_2\| \le K\|f_1 - f_2\|$

定义：收敛　误差 $e_h = \{e_{ij}\}_{ij} \triangleq \{U - u\}_{ij}$

满足　$\lim_{h\to 0}\|e_h\| = 0$.

若　$\|e_h\| = O(h^p)$　　p 阶收敛

注：$-L_h e_{ij} = -(L_h U_{ij} - L_h u_{ij}) = -(f_{ij} - L_h u_{ij})$

不妨令 f 为正则内点　$= -((Lu)_{ij} - L_h u_{ij})$

$= T_{ij}(u)$

则 $\|e_n\| \le K\|T_n\|$ （由稳定性）

定理1.1 设 BVP (1.3.13) 解光滑

逼近差分方程 (1.3.14) 有相容性，稳定性

且 $\|T_n\| = O(h^p)$ 则有收敛性，且 $\|e_n\| = O(h^p)$

阅读：边界条件的处理 见1.3.4

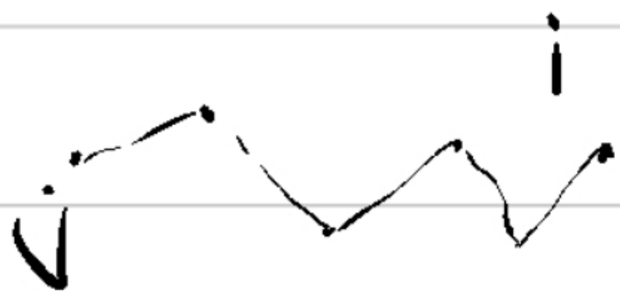
基于最大值原理的误差分析 §1.4

差分BVP
$$\begin{cases} -\Delta_h U_j = f_j & x_j \in \Omega_h \\ U_j = g_j & x_j \in \Gamma_D \end{cases} \tag{1.41}$$

在Ω_h上

$$\Delta_h U_j = \sum_{i \in \Omega_h \cup \Gamma_D} c_{ij} U_i - c_j U_j \tag{1.42}$$

$D_{\Delta_h}(j) = \{ i \in \Omega_h \cup \Gamma_D : c_{ij} \neq 0 \}$ 邻点集

定义连通  $x_i \in \Omega_h$, $i \in \Gamma$

Γ_D连通 $x_i \in \Omega_h$ 当 $i \in \Gamma_D$ 与 Γ 连通

◦ 离散最大值原理

(证明练习)

定理 1.2 (1.4.2) 中 L_h 满足：

(1) $J_\Omega \neq \phi$，且 J 关于 L_h 是 J_Ω 连通

(2) $\forall j \in J_\Omega$，都有 $c_{ij} > 0$ 和 $c_{ij} > 0$ $(\forall i \in D_{L_h}(j))$

且 $c_j \geq \sum_{i \in D_{L_h}(j)} c_{ij}$

若网格函数 U 满足 $L_h U_j \geq 0$ $\forall j \in J_\Omega$

则 U 不可能在内点取到非负最大值，即

$$M_\Omega \triangleq \max_{i \in J_\Omega} U_i \leq \max\{\max_{i \in J_b} U_i, 0\}$$

若 L_h 还满足 (3) J 关于 L_h 连通，且 $\exists j \in J_\Omega$

s.t. $U_j = \max_{i \in J} U_i \geq 0$，则 U 在 J 中为常数

注: eg.1 $-\Delta u = f$ $L = \Delta$

$$L_h = \frac{1}{h^2}(U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 4U_{ij})$$

$$C_j = \sum_{i \in D_h(j)} C_{ij}$$

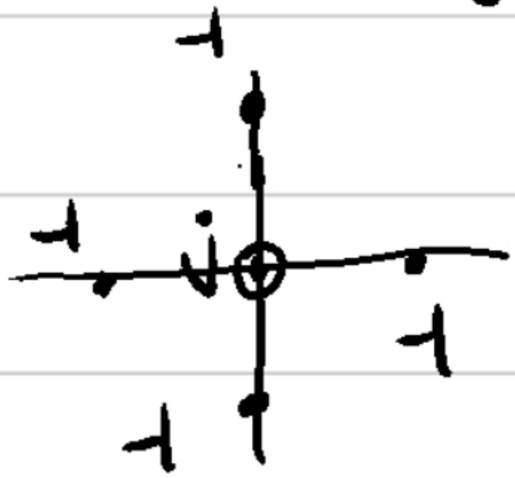
$$L_h U_j \geq 0 \Rightarrow \max_{j \in J_2} U_j \leq \max_{i \in J_0} U_i$$

eg.2. $-\Delta u + u = f$ $L = \Delta - I$

$$L_h = \frac{1}{h^2}(U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 4U_{ij}) - U_{ij}$$

则 $C_j > \sum_{i \in D_h(j)} C_{ij}$

取 $h=1$, $C_j = 5$, $C_{ij} = -1$



$L_h C_j \geq 0$ $5C_j \leq -4$ $C_j \leq -\frac{4}{5}$

可取负向最大值.

推论 1.1 $L_h U_j \le 0 \Rightarrow$

$$m_2 = \min_{i \in J_2} U_i \ge \min\left\{ \min_{i \in D} U_i, 0 \right\}$$

若 $\exists$, $U_j = \min_{i \in J} U_i \le 0$ 则 $U \equiv const$

定理 1.3 L_h 满足定理 1.2 中的 (1)(2)

则 差分方程 (1.4.1) 的解存在唯一

存在性. 系数矩阵 A 行列对角占优

唯一性 U, V 是解, 则 $e = U - V$

满足 $L_h e = 0 \quad j \in J_2$

$e_j = 0 \quad j \in J_0$

由最大值原理 $e \equiv 0$

注: (1)(2)(3) $\Rightarrow A^{-1}$ 所有元素非负.

◦ 比较定理

定理1.4. 设差分算子 L_h 满足定理 1.2 中 (1)(2)

U 是 (1.4.1) 的解，且 $\exists$ 网格函数 $\bar{U}$，s.t.

$$L_h \bar{U} \geq 1, \quad \forall j \in J_2 \qquad (1.4.10)$$

则有 $$\max_{j\in J_2} |U_j| \leq \max_{j\in J_0} |U_j| + \left(\max_{j\in J_0} \bar{U}_j\right)\left(\max_{j\in J_2} |H_j|\right)$$

注1. 构造 $\bar{U}_j^{\pm} = \pm U_j + \left(\max_{j\in J_2} |H_j|\right)\bar{U}_j$.

2. 需构造非负比较函数 s.t. $\max_{j\in J_0} \bar{U}_j$ 关于 h 一致有界.

定理1.5 设差分算子 L_h 满足定理 1.2 中 (1)(2)

$\bar{U}$ 满足 (1.4.10)，则 误差 $e_h = \{e_j\}_{j\in J_2}$ 满足

$$\max_{j\in J_2} |e_j| \leq \max_{j\in J_0} |e_j| + \left(\max_{j\in J_0} \bar{U}_j\right)\left(\max_{j\in J_2} |T_j|\right)$$

注：复杂边界时 可分而治之

阅读定理1.6, 1.7 例1.2.

- 渐近误差分析

回到模型问题，五点差分格式 $h_x=h_y=h$

$$T_j = \frac{1}{12}h^2(\partial_x^4 u + \partial_y^4 u) + O(h^4)$$

$$L_h e_j = -T_j \qquad e_j = v_j - u_j$$

考虑 $-L_h \triangleq -\Delta_h = \frac{1}{12}(\partial_x^4 u + \partial_y^4 u)$

易知 $-L_h \eta_j = \frac{1}{12}(\partial_x^4 u + \partial_y^4 u)_j + O(h^2)$

则 $L_h(v_h - u - h^2\eta) = L_h(e_h - \eta h^2) = O(h^4)$

由比较定理 $U_j = u_j + h^2 \eta_j + O(h^4)$ (1.5.5)

若有数值解 $\|U_h - u\|_\infty = O(h)$

则有 $U_j - h^2 \eta_j = u_j + O(h^4)$

- 外推法：两套网格 J_h, $J_{h/2}$

$$U_{hj} = u_j + h^2 \eta_j + O(h^4) \quad \forall j \in J_h$$

$$U_{\frac{h}{2}j} = u_j + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \eta_j + O(h^4) \quad \forall j \in J_{h/2}$$

$$\Rightarrow U'_{hj} = \frac{1}{3}(4U_{\frac{h}{2}j} - U_{hj}) = u_j + O(h^4) \quad \forall j \in J_h \quad (1.5.9)$$

应用：后验误差估计

(1.5.9) $\Rightarrow$ $U_{hj} - U_j = \underbrace{\frac{4}{3}(U_{hj} - U_{\frac{h}{2}j})}_{\text{误差主项，可数值计算}} + O(h^4) \quad \forall j \in J_h$

一般地 $U_{hj} = U_j + C_j h^\alpha + o(h^\alpha)$

$$U_{\frac{h}{2}j} = U_j + C_j 2^\alpha h^\alpha + o(h^\alpha)$$

$$U_{hj} - U_{\frac{h}{2}j} = (1 - 2^\alpha) C_j h^\alpha + o(h^\alpha)$$

当 $h \ll 1$ 时 $\|U_h - u\| \approx C h^\alpha$, $\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\| \approx (1-2^\alpha) C h^\alpha$

$\ln \|U_h - U_{\frac{h}{2}}\| \approx \alpha \ln h + C_1 \quad (C_1 = \ln(1-2^\alpha)C)$

$= -\alpha \ln h^{-1} + C_1$

在 ln 尺度下，为直线，斜率为 $(-)\alpha$

注：用于数值验证收敛阶.