第二章. 抛物型PDE的差分方法

✱ 引言 §2.1

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = f \quad \text{L 椭圆型算子}$$

○ 模型引例：热传导

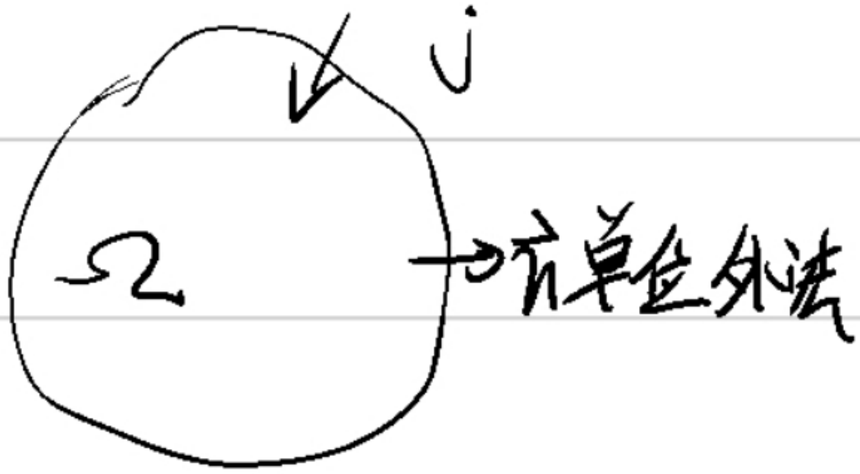
一 $u(x,t)$ 温度，$K(x)$ 热容密度

$\int_\Omega K u \, dx$，Ω 中的总热量.

一 热通量 $j = -a(x)\nabla u$ (Fourier 定律)

其中 $a(x)$ 热传导系数

一 热源 $f(x,t)$



守恒律

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \kappa(x)u(x,t)dx + \int_{\partial\Omega}(-a(x)\nabla u(x,t))\cdot\hat{n}(x)ds$$

$$= \int_\Omega f(x,t)dx \qquad (2.12)$$

即 $$\int_\Omega[\kappa u_t - \nabla\cdot(a\nabla u) - f]dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_t = \kappa^{-1}\nabla\cdot(a\nabla u) + \kappa^{-1}f \qquad (2.14)$$

(2.12) 积分形式　　(2.14) 微分形式

注：① Ω 为全空间，PDE + 初值条件 (I.C.)
为初值问题 (Cauchy)

② 否则 Ω 上需要边值条件 (B.C.)
PDE + I.C. + B.C. 为初边值问题 (IBVP)

阅读三类边界条件

○ 初边值问题的差分方法

(a) ① 引入空间网格

② 定义网格函数

③ 离散近似 L 算子和 B.C.

⇒ 半离散化 $V'(t) = AV(t) + g(t)$

④ 时间离散 (ODE, IVP, 数值解法)

俗称 method of lines, MOL

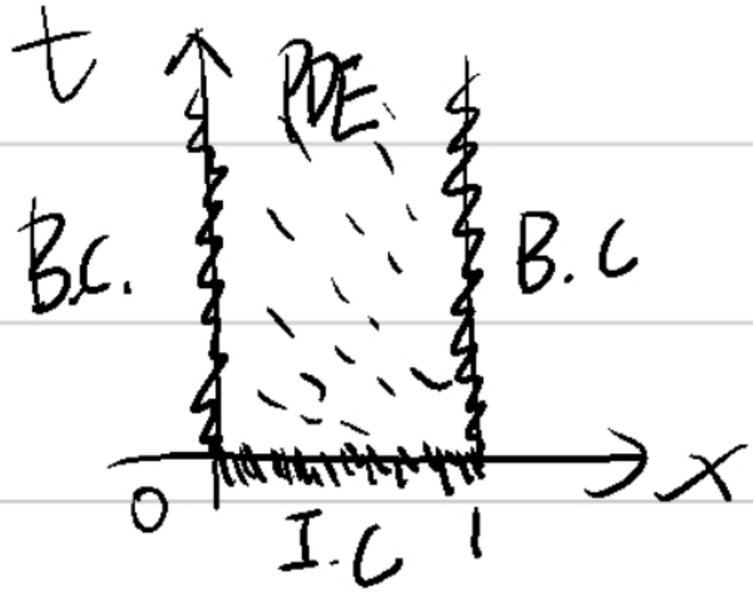
注: 可分析 A 的特征值 + ODE 稳定性理论

参考数材 7.

(b) 引入时空网格, 进行全离散 (本书 V)

☆ 模型问题

$$(IBVP)\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0<x<1,\ t>0 \\ u(x,0) = u^0(x) & 0\le x\le 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t>0 \end{cases}$$



由分离变量法知

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x)$$

其中 $a_k = 2\int_0^1 u^0(x)\sin(k\pi x)\,dx$.

(S1) 在 $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}^+$ 上引入时空网格

空间步长: $h = \Delta x = \frac{1}{N}$, $x_j = jh$, $j = 0, 1, \cdots, N$.

时间步长: $\tau = \Delta t$, $t_m = m\tau$ $m = 0, 1, \cdots$

网格节点 (x_j, t_m), 简记为 (j, m).

(S2) 网格函数 $U=\{U_j^m; j=0,\cdots,N,\ m=0,1,\cdots\}$

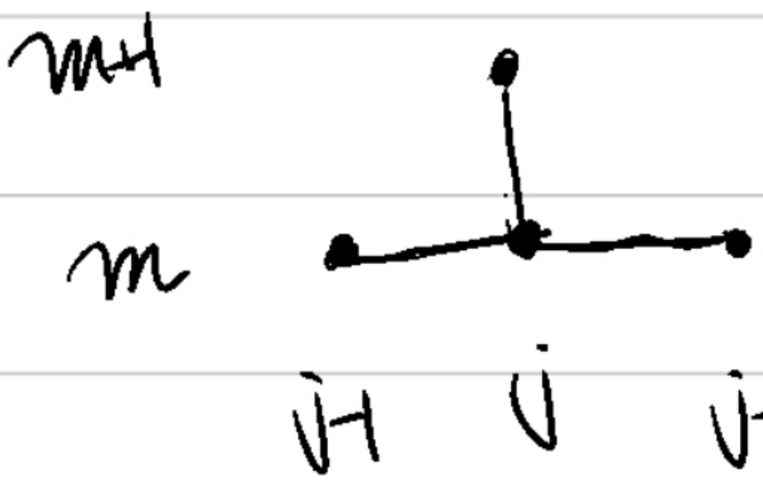
真解 u 在 (j,m) 取值 $U_j^m=u(x_j,t_m)$

(S3) 离散得差分方程 S.t.

① 适定，即解 U 存在，唯一且稳定

② U 在一定意义下 逼近 真解 u

○ 显式格式的构造与相容性



显格式模板 (stencil)

$$\begin{cases} \dfrac{U_j^{m+1}-U_j^m}{\tau} = \dfrac{U_{j+1}^m - 2U_j^m + U_{j-1}^m}{h^2}, & 1\le j\le N-1,\ m\ge 0 \\ U_j^0 = u_j^0, & 0\le j\le N \\ U_0^m = U_N^m = 0, & m\ge 0 \end{cases} \qquad (2.2.8)$$

(explicit)

推导：(a) 空间离散 $L_h U_j = \frac{1}{h^2}(U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1})$

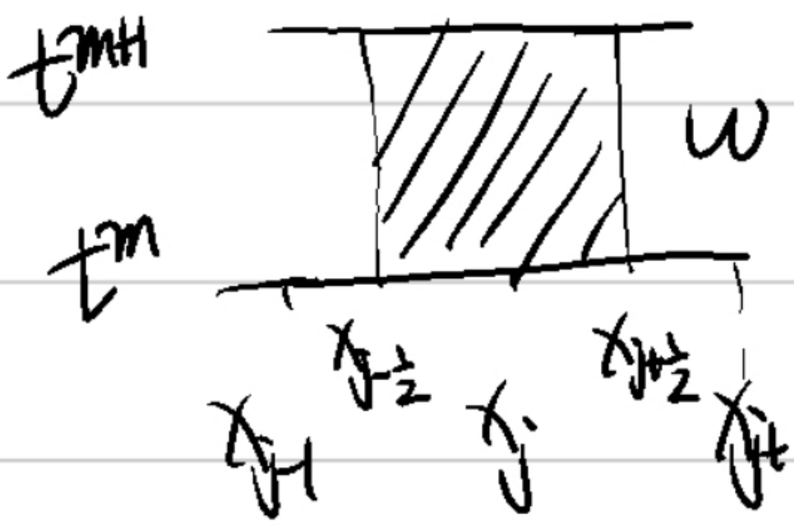
得半离散 $U(t) = (U_1(t), \cdots U_{N-1}(t))$

$U'(t) = L_h U(t)$ $\quad U_0(t) = 0$ $\quad U_N(t) = 0$

$U_j(0) = u_j^0$, $j = 0, 1, \cdots, N$.

forward Euler in t $\Rightarrow$ (explicit)

(b*) $u_t = u_{xx}$ 在 ω 上积分



$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \left[u(x, t_{m+1}) - u(x, t_m)\right] dx$$

$$= \int_{t_m}^{t_{m+1}} \left[u_x(x_{j+\frac{1}{2}}, t) - u_x(x_{j-\frac{1}{2}}, t)\right] dt$$

L.H.S. $\overset{\text{中点公式}}{\approx}$ $\Delta x \left(u_j^{m+1} - u_j^m\right)$

R.H.S. $\overset{\text{左端点公式}}{\approx}$ $\Delta t \left(u_x(x_{j+\frac{1}{2}}, t_m) - u_x(x_{j-\frac{1}{2}}, t_m)\right)$

$\overset{\text{中心差分}}{\approx}$ $\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_{j+1} - u_j - u_j + u_{j-1}\right)$

两边乘以 $\frac{1}{\Delta x \Delta t}$，整理得 (explicit)

注：(explicit) 显然解存在，唯一。

引入截断误差算子 $T_{(h,\tau)} = T$

$$T = \left(\frac{\Delta_\tau}{\tau} - \frac{\delta_x^2}{h^2}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$$

若 u 光滑，由 Taylor 展开得

$$Tu = \underbrace{\frac{1}{2}u_{tt}\tau - \frac{1}{12}u_{xxxx}h^2}_{\text{主项}} + O(\tau + h^4)$$

Def. 差分算子 $\left(\frac{\Delta_\tau}{\tau} - \frac{\delta_x^2}{h^2}\right)$ 与微分算子 $(\partial_t - \partial_{xx})$ 是相容的，若对光滑 u

$$Tu(x,t) \to 0, \quad h \to 0, \tau \to 0, \quad \forall (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}^+$$

$Tu = O(\tau) + O(h^2)$ 时间一阶精度

空间二阶精度.

○ 误差分析 $e = U - u$

$$e_j^m = U_j^m - u(x_j, t_m)$$

记 $\Omega_{t_{max}} = (0,1) \times (0, t_{max})$, $t_{max} > 0$

设真解 u 是 $\overline{\Omega_{t_{max}}}$ 上的光滑函数

(1) 考虑 L^∞ 意义下的收敛性：

定义

$$\|e\|_{\infty, \Omega_{t_{max}}} \triangleq \max\{|e_j^m| : 0 \le j \le 1, 0 \le m\tau \le t_{max}\} \to 0, \ h \to 0, \tau \to 0$$

记 $T_j^m = Tu_j^m$ 为局部截断误差

$$(2.2.21) \begin{cases} \dfrac{e_j^{m+1} - e_j^m}{\tau} = \dfrac{e_{j+1}^m - 2e_j^m + e_{j-1}^m}{h^2} - T_j^m, & 0 \le j \le N-1, \ m \ge 0 \\ e_j^0 = 0 & 0 \le j \le N \\ e_0^m = e_N^m = 0 & m \ge 1 \end{cases}$$

Def: (2.2.21) $L^\infty(\Omega_{t_{max}})$ 稳定，如果 $\exists C_1, C_2$, s.t.

$$\|e\|_{L^\infty,\Omega_{t_{max}}} \le C_1\left[\max_{0\le j\le N}|e_j^0| + \max_{0<m\tau\le t_{max}}(|e_0^m|+|e_N^m|)\right] + C_2\|T\|_{L^\infty,\Omega_{t_{max}}}$$

（以下省略 $\Omega_{t_{max}}$）

(1) 若 L^∞ 稳定，$\|T\|_{L^\infty}=O(\tau+h^2)$，则 $\|e\|_{L^\infty}=O(\tau+h^2)$

(2) C_1, C_2 可能依赖于 $\Omega_{t_{max}}$

下面讨论稳定性条件. 令 $\mu=\frac{\tau}{h^2}$ 为网格比

差分方程 (2.2.8) 与误差方程 (2.2.21) 可写为

$$U_j^{m+1} = (1-2\mu)U_j^m + \mu(U_{j-1}^m + U_{j+1}^m) \quad (2.2.26)$$

$$e_j^{m+1} = (1-2\mu)e_j^m + \mu(e_{j-1}^m + e_{j+1}^m) - \tau T_j^m$$

观察：误差在累积，至 $m\tau=t_{max}$，

$\tau\to 0$ 时 $\quad m=t_{max}/\tau\to\infty$

法一：最大值原理（作业）

$$L_{(h,\tau)}\, U_j^{m+1} = \left(\frac{\delta_x^2}{h^2} - \frac{\Delta_+ t}{\tau}\right) U_j^m$$

法二，递推（类比LF稳定性）

观察 $0<M\le 2$ 时

$$|e_j^{m+1}| \le \max_{0\le j\le N} |e_j^m| + \tau \max_{1\le j\le N+1} |f_j^m|$$

记 $T^m = \max_{1\le j\le N+1} |f_j^m|$，则递推得 $\forall m\ge 0$

$$\max_{1\le j\le N+1} |e_j^{m+1}| \le \max\left\{ \max_{0\le j\le N} |e_j^0|,\ \max_{\substack{1\le l\le m\\ j=0,N}} |e_j^l| \right\} + \tau \sum_{l=0}^{m} T^l.$$

结论2.1 $\mu \le \frac{1}{2}$时 显格式(2.2.8)的解 U

满足最大值原理，即

$$\max_{1\le j\le N+1} |U_j^{n+1}| \le \max\left\{ \max_{0\le j\le N} |U_j^0|, \max_{\substack{1\le k\le n\\ j=0,N}} |U_j^k| \right\}$$

可证有 L^∞ 稳定性（用比较定理或递推）

$$\|e\|_{L^\infty} \le \max_{0\le j\le N} |e_j^0| + \max_{\substack{0<m\le t_{max}\\ j=0,N}} |e_j^m| + t_{max}\|T\|_{L^\infty}$$

结论2.2 当 $\mu = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{2}$ 固定时，$\|e\|_{L^\infty} = O(\tau)$

注：1. 短时估计 $t_{max} = O(1)$，误差可依赖于 t_{max}

2. 长时估计，$t_{max} \gg 1$，需要更精细估计

eg. 关于时间一致的估计 / 解的长时间渐近行为

(II) 考虑 L^2 意义下的收敛性

回顾 $\mathbb{R}$ 上的 Fourier transform

$$V(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{V}(\xi)e^{i\xi x}d\xi$$

$$\hat{V}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}V(x)e^{-i\xi x}dx$$

考虑 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上的网格，$\Delta x=\frac{1}{N}$，$x_j=j\Delta x$，$j=-N,\cdots,N$

和其上的周期函数 U_j $(U_{-N}=U_N, j=-N+1,\cdots,N)$

离散 Fourier transform (DFT)

$$U_j=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=-N+1}^{N}\hat{U}_k e^{ik\pi j\Delta x},\quad j=-N+1,\cdots,N$$

$$\hat{U}_k=\frac{1}{\sqrt{2}N}\sum_{j=-N+1}^{N}U_j e^{-ik\pi j\Delta x},\quad k=-N+1,\cdots,N$$

由 Fourier analysis 可知

定义在 $[-1,0]\times[0,+\infty)$ 上网格的差分方程可有

"分离变量"形式的 Fourier 波型 特解

$$v_j^{(k)m} = \lambda_k^m \underbrace{e^{ik\xi_j\Delta x}}_{\text{时间}(m)\quad\text{空间}(j)}, \quad -N_1 \le j,k \le N$$

↖ 是差分算子的特征函数

λ_k 增长因子，k 波率

令 $v^{(k)m} = (v_{-N_1}^{(k)m}, \cdots, v_N^{(k)m})$，则

$$v^{(k)m} = \lambda_k v^{(k)m-1} = \lambda_k^m v^{(k)0}$$

L^2 稳定必要条件：$\exists$ 不依赖于 N 与 k 的 C s.t.

$$|\lambda_k^m| \le C, \quad \forall n\tau \le t_{max}, \ -N_1 \le k \le N \tag{4}$$

Von Neumann 条件：存在不依赖于 N, k 的常数 K.

s.t. $|\lambda_k| \le 1 + K\tau$, $-N+1 \le k \le N$ (β)

— Von Neuman 条件是 L² 稳定的必要条件

证明：不妨设 (α) 中，$C>1$, $\hat{m} = [\frac{t_{max}}{\tau}] \ge 2$

则 $\xi = \frac{1}{\hat{m}} \in (0,1)$，由于 $y = C^s$ 凹

则 $C^{\frac{1}{\hat{m}}} \le 1 + (C-1)/\hat{m}$

则 $(\alpha) \Rightarrow$ $|\lambda_k| \le C^{\frac{1}{\hat{m}}} \le 1 + \frac{C-1}{\hat{m}} \le 1 + \frac{2(C-1)}{t_{max}}\tau$.

向显格式 (2.2.26)，将 $\psi_j^m = \lambda_k^m e^{ik\pi\frac{j}{N}}$ 代入得

$$\lambda_k^{m+1} e^{ik\pi\frac{j}{N}} = \lambda_k^m e^{ik\pi\frac{j}{N}} [1 + \mu(e^{ik\pi\frac{1}{N}} + e^{-ik\pi\frac{1}{N}} - 2)]$$

(特征方程)

可得 $\lambda_k = 1 - 4\mu \sin^2 \frac{k\pi\Delta x}{2}$.

当 $\mu \le \frac{1}{2}$ 时 von Neumann 条件成立 ($k=0$).

此时，所有 Fourier 波型不增.

当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时 $|\lambda_k| = 1$，不减，其余波型衰减

当 $\mu > \frac{1}{2}$ 时 Fourier 波型 $\lambda_k^n e^{ikx}$ 必指数型增加

L^2 稳定 $\Rightarrow (\alpha) \Rightarrow$ von Neumann (β)

一些情况下

结论 2.4 显格式 (2.2.26) L^2 稳定的充要条件是 $\mu \le \frac{1}{2}$

证明：必要性. 已证，下面证充分性

记差分格式 (2.2.26) $U^{n+1} = N(U^n)$

当 $\mu \le \frac{1}{2}$ 时, $|\lambda_k| \le 1$

由 Parseval 恒等式, 易证

$$\|U^{n+1}\|_{L^2} = \|N(U^n)\|_{L^2} \le \|U^n\|$$

由 (2.2.27), 知 $e^{n+1} = N(e^n) - \tau T^n$

$$\|e^{n+1}\|_{L^2} = \|N(e^n) - \tau T^n\|_{L^2} \le \|N(e^n)\|_{L^2} + \|\tau T^n\|_{L^2}$$

$$\le \|e^n\|_{L^2} + \tau \|T^n\|_{L^2}$$

$$\le \|e^0\|_{L^2} + \tau \sum_{l=0}^{n} \|T^l\|_{L^2}$$

即证了 L^2 稳定性. 因

注: $(\tau, h) \to (0,0)$ 时, 称 $\tau = r(h)$ 是加密路径

若 $r(0) = 0$, r 严格递增

结论2.3, 2.5 中 $h_i \xrightarrow{i\to\infty} 0$

且 加密路径 r 满足 $\mu_i = r(h_i)/h_i^2 \le \frac{1}{2}$

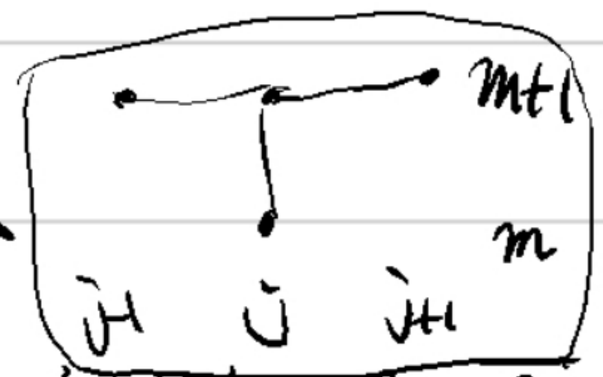
则 $\max\limits_{0\le m\le t_{max}} \|e^m\|_L = O(h_i^2)$, $L=L^2$ 或 L^∞

阅读：结论2.6 Fourier分析 $\Rightarrow L^\infty$估计

Richardson 格式

Du Fort-Frankel 格式

⑥ 隐格式及其稳定性，收敛性



$$\begin{cases} \dfrac{U_j^{m+1}-U_j^m}{\tau} = \dfrac{U_{j+1}^{m+1}-2U_j^{m+1}+U_{j-1}^{m+1}}{h^2}, & 1\le j\le N-1,\ m\ge 0 \\ U_j^0 = U_j^0 & 0\le j\le N \\ U_0^m = U_N^m = 0 & m\ge 1 \end{cases}$$

(2.2.4t) (implicit)

$$-\mu U_{j-1}^{m+1} + (1+2\mu)U_j^{m+1} - \mu U_j^{m+1} = U_j^m \qquad (2.2.4t)$$

$\mu = \tau/h^2$

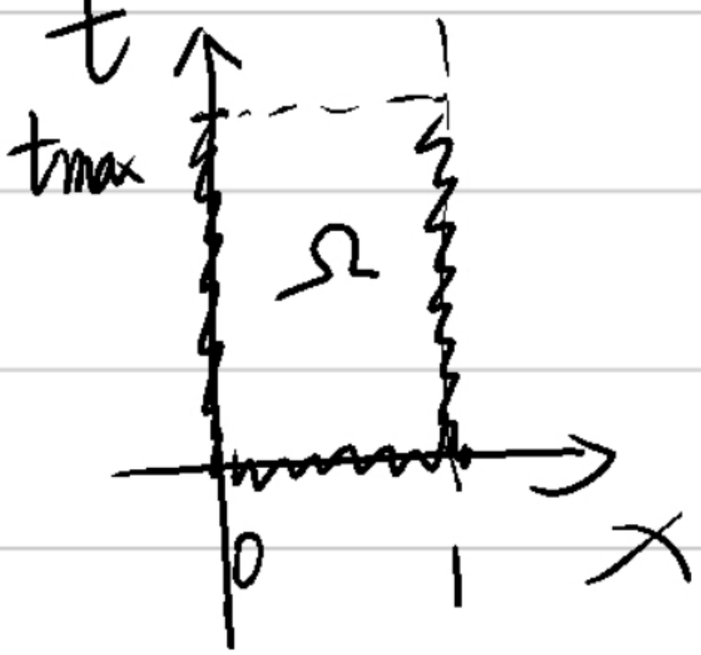
截断误差算子 $T=\left(\frac{\Delta_\tau}{\tau}-\frac{\delta_x^2}{h^2}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$

易知 $Tu(x,t)=O(\tau+h^2)$

下面讨论稳定性

差分方程可写成

$$(1+2\mu)\,y_j^{m+1}=y_j^m+\mu\left(y_{j-1}^{m+1}+y_{j+1}^{m+1}\right)$$



误差满足

$$(1+2\mu)\,e_j^{m+1}=e_j^m+\mu\left(e_{j-1}^{m+1}+e_{j+1}^{m+1}\right)-\tau T_j^{m+1}$$

归纳可证(作业) $\forall \mu>0$

$$\max_{1\le j\le M-1}|e_j^{m+1}|\le \max\left\{\max_{0\le j\le N}|e_j^0|,\ \max_{1\le k\le m+1}\{|e_0^k|,|e_M^k|\}\right\}+\tau\sum_{k=1}^{m+1}T^k,\quad \forall m\ge 0$$

注: ① 隐格式无条件 L^∞ 稳定

② 可证 $L_{(h,\tau)}=\frac{\delta_x^2}{h^2}-\frac{\Delta_t}{\tau}$ 无条件满足最大值原理

③ L^∞ 误差估计可被改进

von Neumann分析

将 $U_j^m = \lambda_k^m e^{ik\pi j\Delta x}$ 代入 (2.2.47)

得增长因子 $\lambda_k = \dfrac{1}{1+4\mu\sin^2\frac{k\pi\Delta x}{2}}$

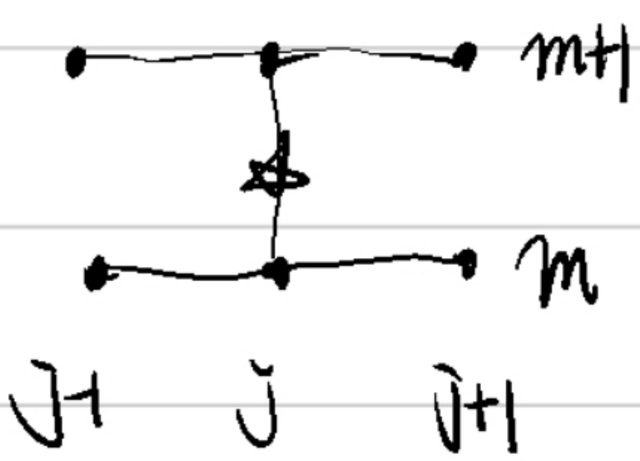
注：1. 隐格式无条件L2稳定

2. $O(\tau+h^2)$ 误差，仍需 $\tau=O(h^2)$

构造误差$O(\tau^2+h^2)$的格式，且无稳定性限制？

Crank-Nicolson 格式 (C-N) (2.56)

$$\frac{U_j^{m+1}-U_j^m}{\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_{j+1}^{m+1}-2U_j^{m+1}+U_{j-1}^{m+1}}{h^2} + \frac{U_{j+1}^m-2U_j^m+U_{j-1}^m}{h^2}\right)$$



截断误差在 $(x_j, t_{m+\frac{1}{2}})$ 展开

$$T = O(\tau^2+h^2)$$

下面讨论稳定性

注：1. 无条件 L^2 稳定

增长因子 $\lambda_k = \dfrac{1-2\mu\sin^2\frac{k\Delta x}{2}}{1+2\mu\sin^2\frac{k\Delta x}{2}}$.

2. (2.256) 可改写为 $\mu = \gamma/h^2$

$$(1+\mu)U_j^{m+1} = (1-\mu)U_j^m + \frac{\mu}{2}\left(U_{j-1}^m + U_{j+1}^m + U_{j-1}^{m+1} + U_{j+1}^{m+1}\right)$$

需要 $\mu \le 1$，即 $\gamma \le h^2$ 才有满足最大值原理的条件（$(j, m+1)$ 节点的视角）

3 阅读 C-N 的变种 θ 格式

☆ 一维抛物型方程的差分逼近

一些模型 $u_t = a(x,t)u_{xx}$

$u_t = (a(x,t)u_x)_x$

$u_t = \underbrace{(a(x,t)u_x)_x}_{\text{扩散}} + \underbrace{b(x,t)u_x}_{\text{对流}} + c(x,t)u + d(x,t)$

$u_t = a(u)u_{xx}$ 非线性

一些方法：直接离散（显 vs 隐）

有限体积法

一些标准：截断误差

稳定性

（多数变系数，非线性问题很难）

保结构：正性，(守恒性)，先验估计 etc.

◦ 基于半离散的差分格式 (MOL)

模型问题的半离散形式

$$U_h'(t) = -N^2 A_h U_h(t) \qquad A_h = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

A_h 特值为 $\lambda_k = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)$ $k=1,\cdots,N-1$

$N\gg 1$ 时 $\lambda_{N-1}/\lambda_1 = O(N^2)$ A_h "刚性"

事实上 $L\phi_k = \lambda_k\phi_k$ $\lambda_k \to +\infty$, $k\to+\infty$

一般 $U_h'(t) = L_h U_h + f$ 是刚性系统

$\Rightarrow$ ODE 稳定域无条件包含 λ_k (隐)

或 ODE 稳定域有条件包含 λ_k (显)

稳定性条件

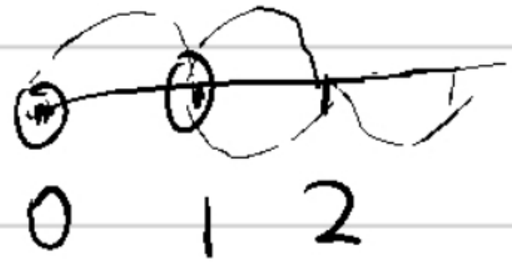
注: 更灵活设计时间高阶格式.

◎ 一般边界条件的处理 (一维)

考虑. $u_x(0,t) = \alpha(t)\, u(0,t)$, $\alpha(t) \geq 0$, $t>0$

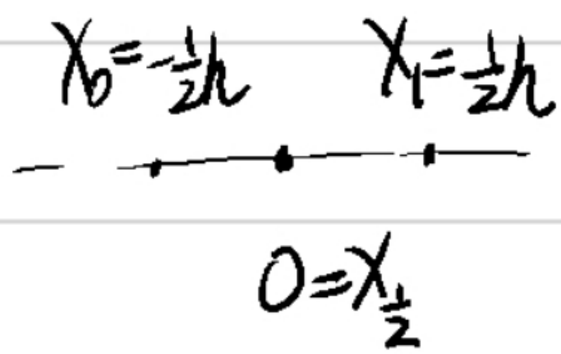
first attempt $\dfrac{U_1^m - U_0^m}{\Delta x} = \alpha^m U_0^m + g_0^m$, $m \geq 1$

可证① 局部截断误差 $T_1^m = O(1)$



② 整体误差 $O(\tau+h)$, "降阶".

法一: 半整点



$\frac{1}{2}$ 节点 $\dfrac{U_1^m - U_0^m}{\Delta x} = \frac{1}{2}\alpha^m (U_1^m + U_0^m) + g_0^m$

即 $U_0^m = \xi^m U_1^m - \eta^m g_0^m \Delta x$

$\xi^m = \dfrac{2-\alpha^m \Delta x}{2+\alpha^m \Delta x}$, $\eta^m = \dfrac{2}{2+\alpha^m \Delta x}$

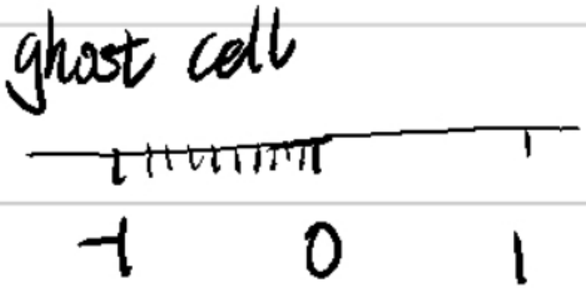
1 节点 $\frac{U_1^{m+1}-U_1^m}{\tau}=\frac{U_2^m-2U_1^m+U_0^m}{h^2}$ (explicit)

可消掉 U_0^m 只关注 $U_1^m, U_2^m, \cdots$

可证：局部截断误差 $T_1^m=O(\tau+h)$

($\mu\le\frac{1}{2}$) 整体误差 $O(\tau+h^2)$

法二. 影子单元



0 节点 B.C. $\frac{U_1^m-U_{-1}^m}{2\Delta x}=\alpha^m U_0^m+g_0$

方程 $\frac{U_0^{m+1}-U_0^m}{\tau}=\frac{U_1^m-2U_0^m+U_{-1}^m}{h^2}$ (explicit)

可消掉 U_{-1}^m, 只关注 $U_0^m, U_1^m, \cdots$

可证：局部截断误差 $T_0^m=O(\tau+h)$

$2\mu(1+\alpha^m h)\le 1$ 时，整体误差 $O(\tau+h^2)$

法三：积分插值法. (作业)

○ 守恒性

模型
$$\begin{cases} u_t = a u_{xx} & 0<x<1,\ t>0 \\ u(x,0) = u_0(x) & 0\le x\le 1 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = g(t) & t>0 \end{cases}$$

在 $[0,1]\times[t_1,t_2]$ 上积分 得

$$\int_0^1 u(x,t_2)\,dx - \int_0^1 u(x,t_1)\,dx$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(a u_x(1,t) - a u_x(0,t)\right) dt = 0$$

即 $\int_0^1 u(x,t)\,dx \equiv \text{const}$ 守恒

问：其离散形式 $\sum_j U_j^m = \sum_j U_j^0,\ \forall m\ge 1$

易证：比如 explicit 中半整点法处理边界

可以使离散形式守恒。

☆ 高维抛物型PDE

2维模型问题 $\Omega=(0,X)\times(0,Y)$

$$\begin{cases} u_t = a(u_{xx}+u_{yy}), & (x,y)\in\Omega,\ t>0 \\ u(x,y,0)=u^0(x,y) & x,y\in\bar{\Omega} \\ u(x,y,t)=g(x,y,t) & (x,y)\in\partial\Omega,\ t>0 \end{cases}$$

网格 $h_x=\Delta x=\frac{X}{N_x}$, $h_y=\Delta y=\frac{Y}{N_y}$, τ

$x_j=jh_x$ $y_k=kh_y$, $t_m=m\tau$

网格函数 $U_{j,k}^m$ $U_{j,k}^m=u(x_j,y_k,t_m)$

差分格式：

① 显格式 $\frac{\Delta_{+t}}{\tau}U_{j,k}^m=a\left(\frac{\delta_x^2}{h_x^2}+\frac{\delta_y^2}{h_y^2}\right)U_{j,k}^m$

截断误差 $Tu=O(\tau+h_x^2+h_y^2)$

稳定性，记 $\mu_x=a\tau/h_x^2$ $\mu_y=a\tau/h_y^2$

L^2, L^∞最大值 $\mu_x+\mu_y\le\frac{1}{2}$

$$U_{j,k}^{n+1} = (1 + \mu_x \delta_x^2 + \mu_y \delta_y^2) U_{j,k}^n$$

② 隐格式，C-N 或 θ-格式

结论与一维完全平行（阅读）

但求解线性方程组难度加大

Implicit $(1 - \mu_x \delta_x^2 - \mu_y \delta_y^2) U_{jk}^{n+1} = U_{jk}^n$

C-N $(1 - \frac{1}{2}\mu_x \delta_x^2 - \frac{1}{2}\mu_y \delta_y^2) U_{jk}^{n+1} = (1 + \frac{1}{2}\mu_x \delta_x^2 + \frac{1}{2}\mu_y \delta_y^2) U_{jk}^n$

- 分数步长法（初步）

目标：多步演化一个时间步长

每步至多一个方向隐式

- ADI (Alternating direct implicit) method

x隐 y显　　x显 y隐

$t_m \xrightarrow{\frac{1}{2}\tau} t_{m+\frac{1}{2}} \xrightarrow{\frac{1}{2}\tau} t_{m+1}$

$$\begin{cases} \dfrac{U_{jk}^{m+\frac{1}{2}} - U_{jk}^{m}}{\frac{1}{2}\tau} = a\left(\dfrac{\delta_x^2}{h_x^2} U_{jk}^{m+\frac{1}{2}} + \dfrac{\delta_y^2}{h_y^2} U_{jk}^{m}\right) \\ \dfrac{U_{jk}^{m+1} - U_{jk}^{m+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\tau} = a\left(\dfrac{\delta_x^2}{h_x^2} U_{jk}^{m+\frac{1}{2}} + \dfrac{\delta_y^2}{h_y^2} U_{jk}^{m+1}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1 - \tfrac{1}{2}\mu_x \delta_x^2) U_{jk}^{m+\frac{1}{2}} = (1 + \tfrac{1}{2}\mu_y \delta_y^2) U_{jk}^{m} \\ (1 + \tfrac{1}{2}\mu_y \delta_y^2) U_{jk}^{m+1} = (1 + \tfrac{1}{2}\mu_x \delta_x^2) U_{jk}^{m+\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ 单步格式 $(1 - \tfrac{1}{2}\mu_x \delta_x^2)(1 - \tfrac{1}{2}\mu_y \delta_y^2) U_{jk}^{m+1}$

$$= (1 + \tfrac{1}{2}\mu_x \delta_x^2)(1 + \tfrac{1}{2}\mu_y \delta_y^2) U_{jk}^{m}$$

注：$U_{jk}^{m+\frac{1}{2}}$ 可用 $t = t_{m+\frac{1}{2}}$ 时的边界条件

因为 $U_{jk}^{m+\frac{1}{2}} \approx u(x_j, y_k, t_{m+\frac{1}{2}})$

可证：① 局部截断误差 $O(\tau^2+h_x^2+h_y^2)$

② 无条件L稳定

③ 最大值条件 $\max\{\mu_x,\mu_y\}\le 1$

- LOD (Locally one-dimensional) method

$$u_t = Au+Bu \qquad A=a\partial_{xx} \quad B=a\partial_{yy}$$

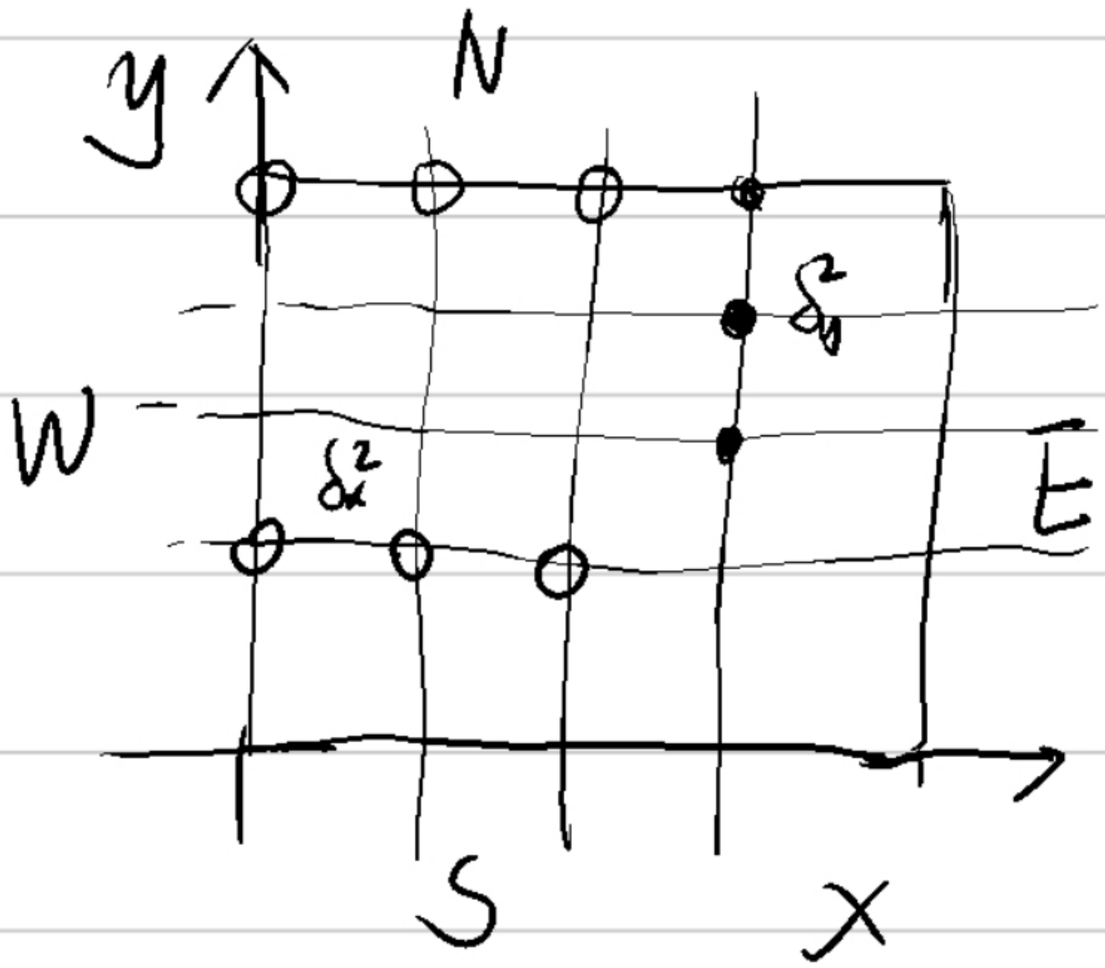
$$u^m \xrightarrow{A\&B,\ \Delta t} u^{m+1}$$

$$u^m \xrightarrow{A\,\Delta t} u^{m*} \xrightarrow{B\,\Delta t} u^{m+1}$$

注意 u^{m*} 不一定 $\approx u^{m+\frac12}$

$$\begin{cases} \dfrac{U_{jk}^{m*}-U_{jk}^{m}}{\tau} = \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{\delta_x^2}{h_x^2}U_{jk}^{m}+\dfrac{\delta_x^2}{h_x^2}U_{jk}^{m*}\right) \\ \dfrac{U_{jk}^{m+1}-U_{jk}^{m*}}{\tau} = \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{\delta_y^2}{h_x^2}U_{jk}^{m*}+\dfrac{\delta_y^2}{h_y^2}U_{jk}^{m+1}\right) \end{cases}$$

即
$$(1-\tfrac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)U_{jk}^{n+*}=(1+\tfrac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)U_{jk}^{n} \quad -(a)$$
$$(1-\tfrac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)U_{jk}^{n+1}=(1+\tfrac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)U_{jk}^{n+*} \quad -(b)$$



U_{jk}^{n+*}的边界条件？

(b)中需 U_{jk}^{n+1}, U_{jk}^{n+*} on N.S

(a)中需 U_{jk}^{n}, U_{jk}^{*} on W.S

on N.S, $k=0, N_y$ 用(a)算 U_{jk}^{n+*} $1\le j\le N_x-1$

on W,E $j=0, N_x$ 用(b)算 U_{jk}^{n+1} $1\le k\le N_y-1$

计算技巧：(不用解方程组)

将(b)两边乘以 $(1-\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)$，得

$$(1-\mu_y\delta_y^2+\tfrac{1}{4}\mu_y^2\delta_y^4)U_{jk}^{n+1}=(1-\tfrac{1}{4}\mu_y^2\delta_y^4)U_{jk}^{n+*}$$

忽略高阶项，（即用 ∂_{yy} 隐向演化 Δt）

$$U_{i,k}^{m+*} = (1 - \mu_y \delta_y^2) U_{i,k}^{m+1} \quad \text{on } W, E$$

类似地 (a) 乘以 $(1+\frac{1}{2}\mu_x \delta_x^2)$，忽略高阶

得：on N, S $\quad U_{i,k}^{m+*} = (1+\mu_x \delta_x^2) U_{i,k}^{m}$

总之：$U_{i,k}^{m} \xrightarrow{a\partial_{xx},\Delta t} U_{i,k}^{m+*} \xrightarrow{a\partial_{yy},-\Delta t} U_{i,k}^{m+1}$

注：假设角落（eg. $U_{0,0}^{m+*}$）易处理或不需要

可证：截断误差 $O(\tau + h_x^2 + h_y^2)$

无条件 L^2 稳定。

- 三维或者更多维？

ADI：直接类比二维？

不再无条件稳定

阅读改进策略（不唯一）

LOD：直接推广，

注意：边界条件的处理。