双曲型PDE的差分方法

☆ 引言 §3.1

一阶线性双曲型方程组

$u=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_p\end{pmatrix}$ $x\in\mathbb{R}^n, t\in\mathbb{R}^1$ $u:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^p$

$$u_t+\sum_{i=1}^{n}A_i u_{x_i}+Bu=f.$$

这里 $A_i\in\mathbb{R}^{p\times p}$ $B\in\mathbb{R}^{p\times p}$ $f\in\mathbb{R}^p$

且 A_i的线性组合 $A=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i A_i$ 可实对角化

即 A 有p个线性无关特征向量，特征值实

特别，若还有特征值互不相同，严格双曲

注：双阶可化为一阶

一维一阶常系数线性双曲型方程组

$u: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^p \qquad A \in \mathbb{R}^{p\times p}$

$$u_t + A u_x = 0$$

A 可实对角化 设 $AR = R\Lambda$, $\Lambda = diag(\lambda_1, \cdots \lambda_p)$

其中 特征值 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \lambda_p$

定义 $W = R^{-1} u \in \mathbb{R}^{p\times 1}$

$$R^{-1} u_t + R^{-1} A R R^{-1} u_x = 0$$

即 $$u_t + \Lambda w_x = 0$$ 解耦

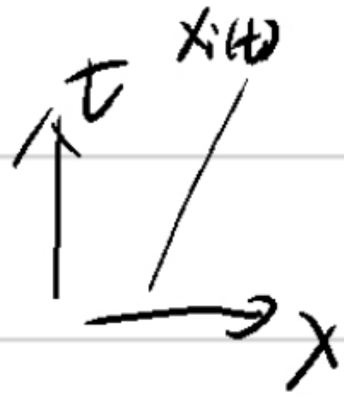
$$\partial_t w_i + \lambda_i \partial_x w_i = 0, \quad i = 1, \cdots, p$$

特征线 $\frac{dx_i}{dt} = \lambda_i, \quad i = 1, \cdots, p \Rightarrow x_i(t)$

则 $w_i(x,t)$ 与 $x = x_i(t)$ 复合 $w_i(x_i(t), t)$

$$\frac{d}{dt} w_i(x_i(t), t) = \partial_t w_i + \frac{dx_i(t)}{dt} \partial_x w_i$$

$$= \partial_t w_i + \lambda_i \partial_x w_i = 0$$



w_i 沿 第 i 族特征线是常数

$$w_i(x,t) = w_i(x - \lambda_i t, 0) \quad \cdots (\alpha)$$

令 $R=(\xi^1,\cdots,\xi^p)$ $R^{-1}=\begin{pmatrix}\eta^1\\ \vdots\\ \eta^p\end{pmatrix}$

易知 $w_i=\eta^i u$ ---(β)

$\begin{cases}\text{右特征向量 } \xi\in\mathbb{R}^{p\times 1} & \exists \quad A\xi^i=\lambda_i\xi^i\\ \text{左特征向量 } \eta\in\mathbb{R}^{1\times p} & \dashrightarrow \quad \eta^i A=\lambda_i\eta^i\end{cases}$

称 $w_i, i=1,\cdots,p$ 为特征 (λ_i,ξ^i) 的 Riemann 不变量

由 (α)(β) 知

$$\begin{aligned}u(x,t)&=Rw(x,t)\\&=\sum_{i=1}^p \xi^i w_i(x,t)\\&\overset{(\alpha)}{=}\sum_{i=1}^p \xi^i w_i(x-\lambda_i t,0)\\&\overset{\beta}{=}\sum_{i=1}^p \xi^i\eta^i u(x-\lambda_i t,0)\end{aligned}$$

"$1-1=1$"

考虑时空点集 $\Omega_T\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ (eg. $(0,1)\times(0,T)$)

依赖区域 $D(\Omega_T)$

$=\{y\in\mathbb{R}\ ;\ y=x-\lambda_i t,\ i=1,\cdots,p,\ \forall(x,y)\in\Omega_T\}$

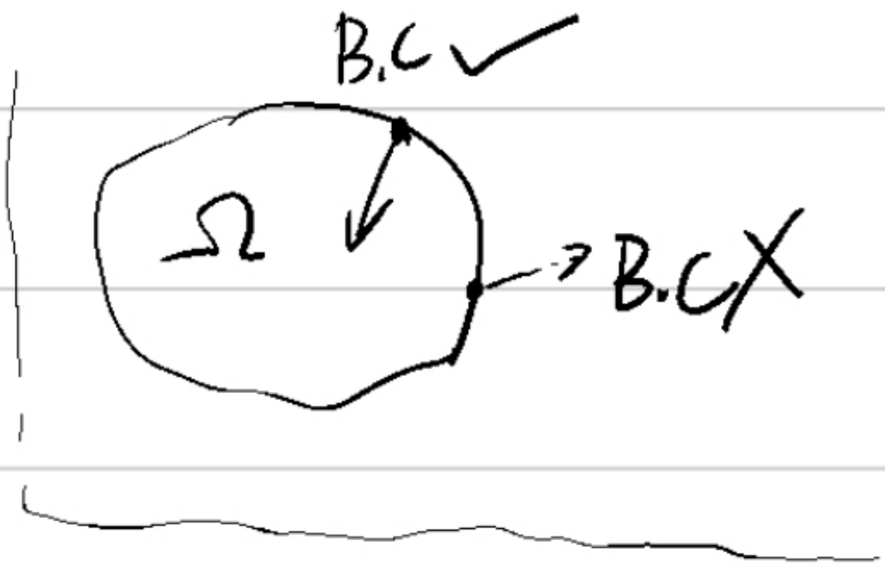
给定空间点集 $\Omega \subset \mathbb{R}$,

影响区域 $I(\Omega)=\{(x,t)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \exists i \text{ s.t. } x-\lambda_i t\in\Omega\}$

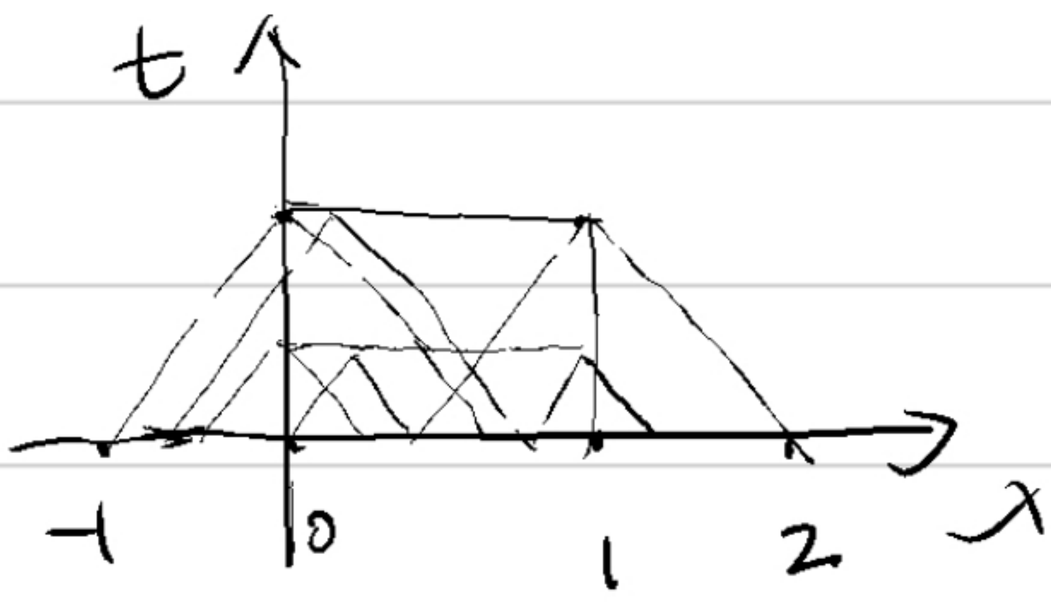
决定区域 $K(\Omega)=\{(x,t)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \ x_i=x-\lambda_i t\in\Omega, i=1\cdots p\}$

法：初边值问题，B.C. 需给定

例 $p=2$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$

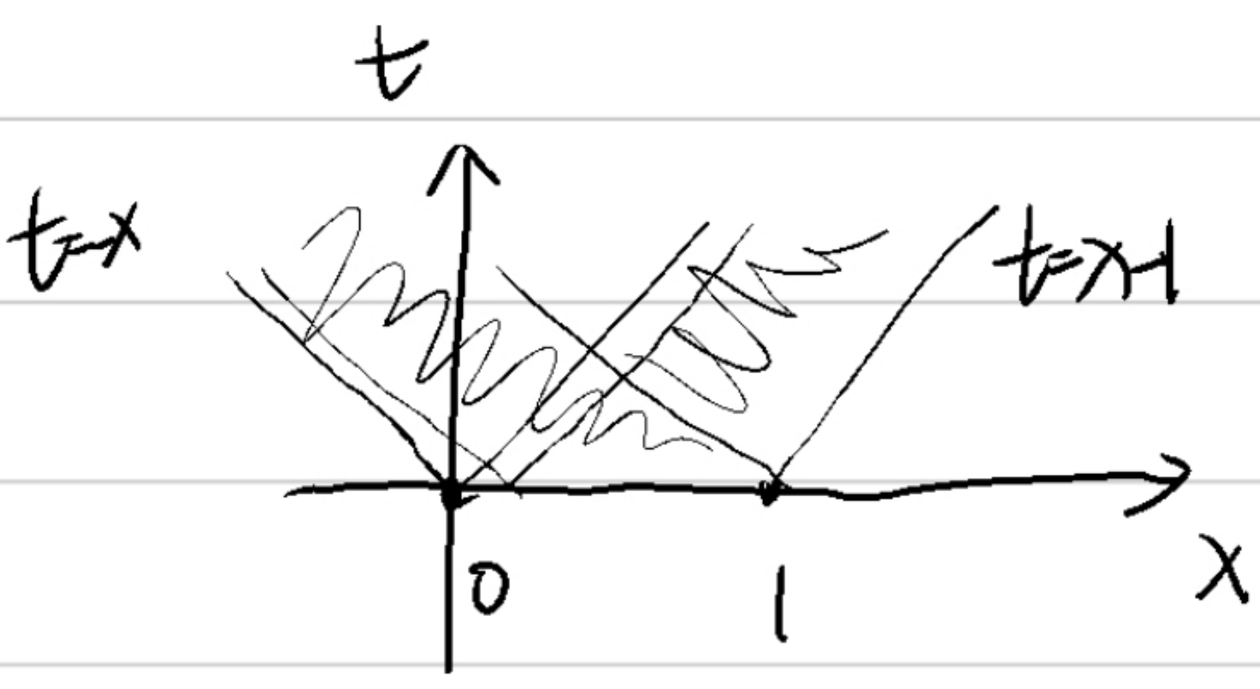


① 令 $\Omega_T=(0,1)\times(0,1)$

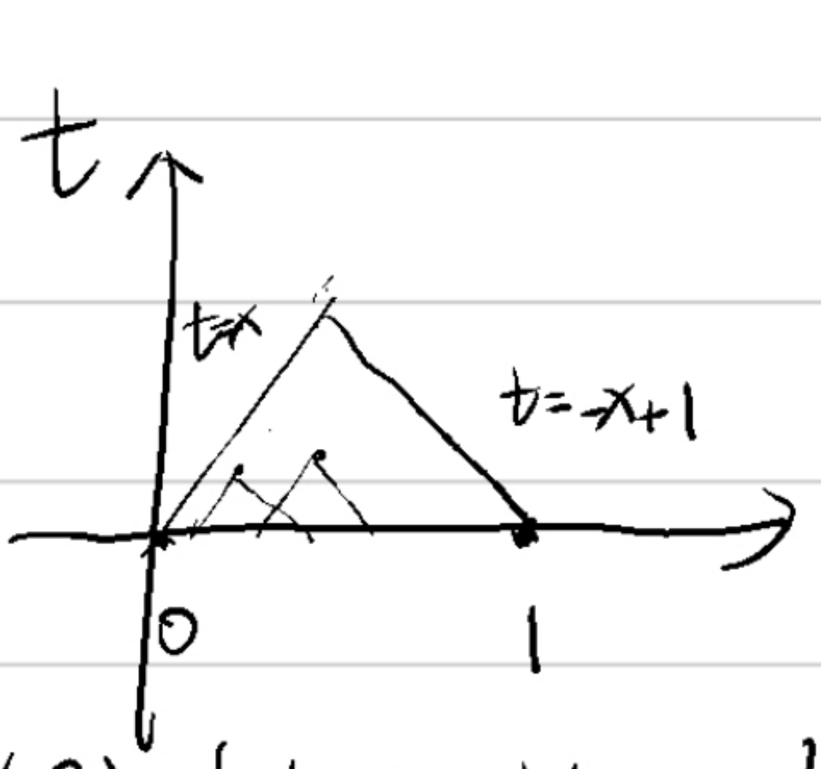


则 $D(\Omega_T)=(-1,2)$

② 令 $\Omega=(0,1)$



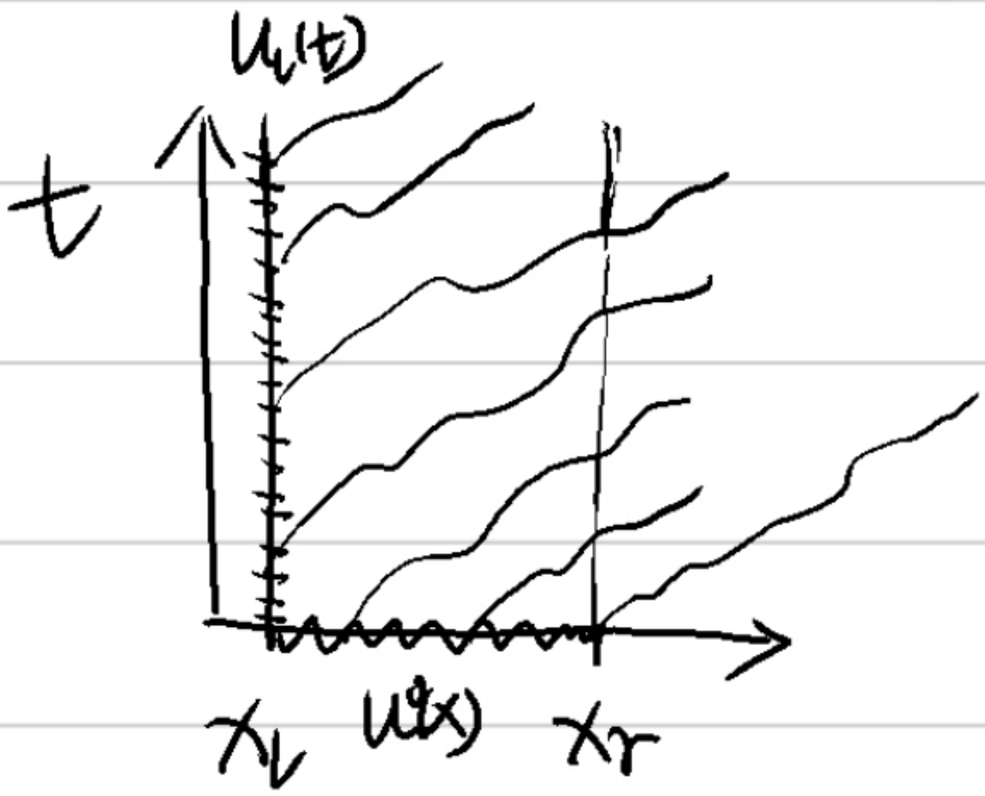
$I(\Omega)=\{-t<x<1+t$ 或 $t<x<t+1, t\geq 0\}$



$K(\Omega)=\{t<x<1+t, t>0\}$

模型问题 $I=(x_l, x_r)\subset\mathbb{R}$ $a(x,t)>0$

$$\begin{cases} u_t + a u_x = 0, & x\in I,\ t>0 \\ \text{I.C.}\quad u(x,0)=u^0(x) & x\in I \\ \text{B.C.}\quad u(x_l,t)=u_l(t) & t>0 \end{cases}$$



$$\frac{dx}{dt}=a(x,t),\quad x(0)=x_0\in I$$

或 $x(t_0)=0,\ t_0>0$

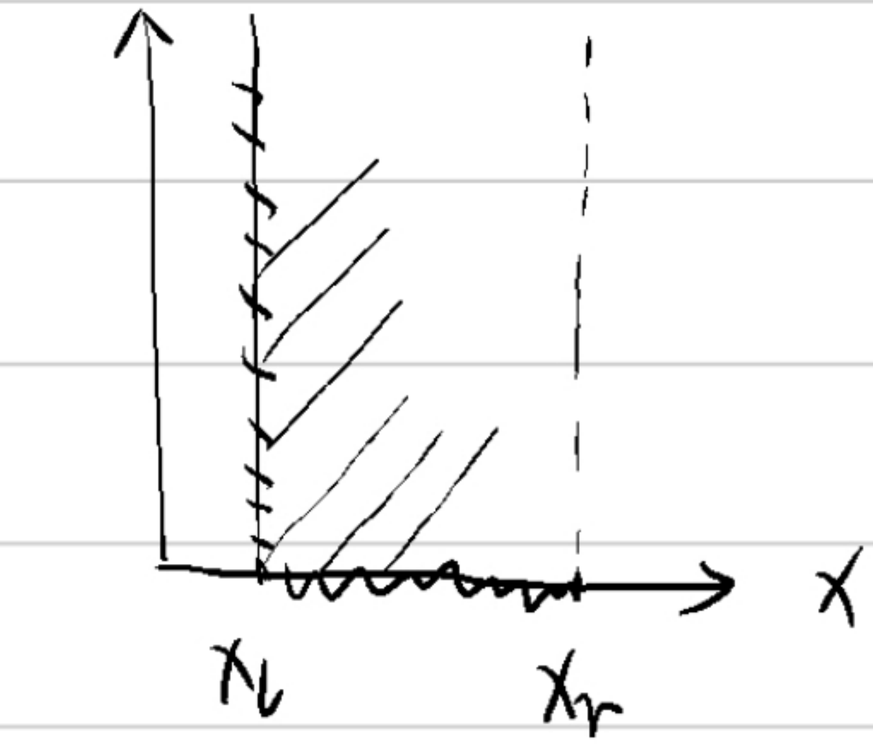
$x(t;x_0)$ 或 $x(t,t_0)$ $\triangleq x(t)$

$$u(x(t),t)=u(x_0,0)$$

或 $u(x(t),t)=u(0,t_0)$

下面考虑 $a>0$ 为常数

由特征线法



$$u(x,t)=\begin{cases} u^0(x-at), & x-at\geq x_l \\ u^l\left(t-\frac{x-x_l}{a}\right), & x-at<x_l \end{cases}$$

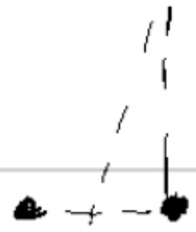
S1 时空网格 $\tau=\Delta t$ $h=\Delta x=\left(\frac{x_r-x_l}{N+1}\right)$

节点 (x_j,t_m) 简记 (j,m)

S2 网格函数 U_j^m, $u_j^m=u(x_j,t_m)$

S3 数值格式 (差)

(ex1) $\frac{U_j^{m+1}-U_j^m}{\tau}+a\frac{U_j^m-U_{j-1}^m}{h}=0$



记 $\nu=\frac{a\tau}{h}$ (网格比), 则

(ex2) $U_j^{m+1}=(1-\nu)U_j^m+\nu U_{j-1}^m$ (显格式)

注:数值解存在,唯一

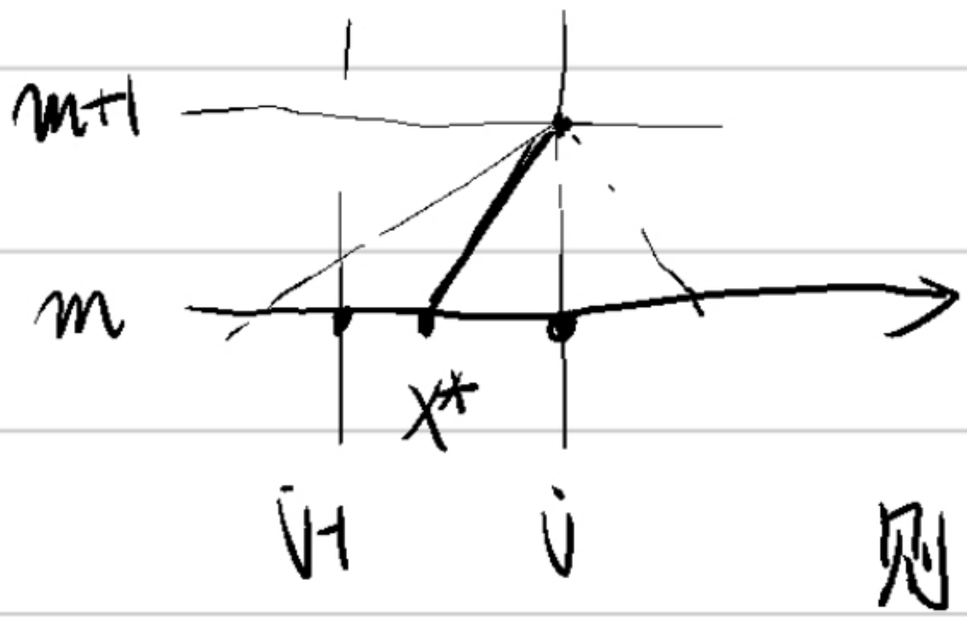
◎ 相容性: $T_j^m=\frac{u_j^{m+1}-u_j^m}{\tau}+a\frac{u_j^m-u_{j-1}^m}{h}-[u_t+au_x]_j^m$

若光滑,则 $T_h=\max\{|T_j^m|\}=O(\tau+h)$

下面讨论稳定性、收敛性.

令误差 $e_j^m=U_j^m-u_j^m$, 则

由(ex2) $e_j^{m+1} = (1-\nu)e_j^m + \nu e_{j-1}^m - \tau T_j^m$



当 $0 \le \nu \le 1$ 时 x^* 介于 x_{j-1}, x_j 之间

此时 若初值无误差

则 $\forall (m+1)\tau \le t_{max}$, 有

$$E^{m+1} \triangleq \max_j |e_j^{m+1}| \le E^m + \tau \max_j |T_j^m|$$

$$\le E^0 + \tau \sum_{k=0}^{m} \max_j |T_j^k|$$

$$\le E^0 + t_{max} \max_{j,m} |T_j^m|$$

则 解光滑, $\nu \in (0,1]$ 则 $\|E\|_\infty = O(\tau+h)$

CFL条件 $(\tau,h) \xrightarrow{\text{加密路径 } \tau=rh} 0$ 时

真解的依赖域 $\subset$ 数值解的依赖域

注: 1. CFL条件是必要的

2. CFL条件可能充分(上包), 也可能不充分

反例：(ex3) $\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\tau}+a\frac{U_{j+1}^n-U_{j-1}^n}{2h}=0$



易知 CFL条件：$|\nu|=\frac{|a|\tau}{h}\le 1$

但 von Neumann analysis 给出（$U_j^n=\lambda_k^n e^{ikjh}$）

$$\lambda_k=1-i\nu\sin kh$$

因此 (ex3) 在广义上恒不稳定！

注：1. 一般地 $a(x,t)$ (ex1)为迎风格式

$$U_j^{n+1}=\begin{cases} U_j^n-\nu_j^n\Delta_+U_j^n, & a_j^n\le 0 \\ U_j^n-\nu_j^n\Delta_-U_j^n, & a_j^n\ge 0 \end{cases}$$

其中 $\nu_j^n=a_j^n\tau/h$.

收敛性分析 类似

2. 也可用线法（MOL）构造格式

但是更需要小心（ex3 给出反例）

Lax-Friedrich, Law-Wendroff - (教材)

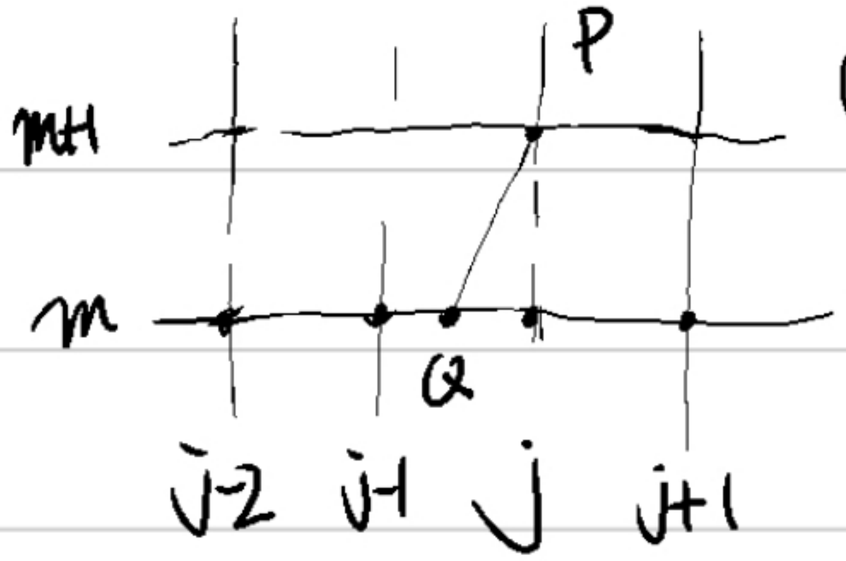
3. 也可用插值法构造.

※ 高精度格式

模型 $u_t + a u_x = 0$ $a>0$ 常数

单步法 (用 U^{n+1}, U^n)

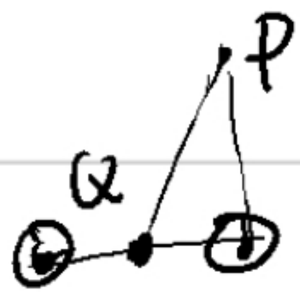
法一：插值法 由特征线 $u(P) = u(Q)$



① 用 U_j^n 插值逼近 Q 点的值

② 符合 CFL 条件 $\gamma = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$

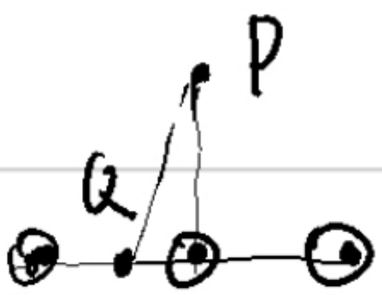
一阶



$$U_j^{n+1} = (1-\gamma) U_j^n + \gamma U_{j-1}^n$$

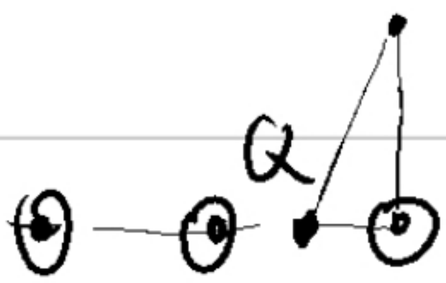
迎风 (upwind)

二阶 (a) Lax-Wendroff



$$U_j^{n+1} = -\frac{1}{2}\gamma(1-\gamma) U_{j+1}^n + (1-\gamma^2) U_j^n + \frac{1}{2}\gamma(1+\gamma) U_{j-1}^n$$

(b) Beam-Warming



$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(1-\gamma)(2-\gamma) U_j^n + \gamma(2-\gamma) U_{j-1}^n - \frac{1}{2}\gamma(1-\gamma) U_{j-2}$$

注：L-W, B-W 都不满足最大值原理

(有负系数项)

法二，渐近误差分析（误差主项）

由局部误差分析知，真解 u 满足

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}=-\frac{1}{2}ah(1-\nu)[u_{xx}]_j^n+O(h^2)$$

注：① $-\frac{1}{2}ah(1-\nu)[u_{xx}]_j^n$ 是误差主项

② $\nu\in[0,1]$ 时，有额外正耗散

用 $h^{-2}\delta_x^2 u_j^n$ 替代 $[u_{xx}]_j^n$，得

$$\frac{u_j^n-u_j^{n+1}}{\tau}+a\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}+\frac{1}{2}ah(1-\nu)\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}=0$$

整理可得 Lax-Wendroff.

注：用 $h^2\delta_x^2 u_{j-1}^n$ 替代 $[u_{xx}]_j^n$，可得 Beam-Warming

法三：半离散，先时后空

$$u_j^{n+1} = \left[u + \tau u_t + \frac{1}{2}\tau^2 u_{tt}\right]_j^n + O(\tau^3)$$

由 $u_t + a u_x = 0$，$u_t = -a u_x$

$$u_{tt} = (-a u_x)_t = -a(u_t)_x = -a(-a u_x)_x = a^2 u_{xx}$$

则 $u_j^{n+1} = \left[u - a\tau u_x + \frac{1}{2}\tau^2 a^2 u_{xx}\right]_j^n + O(\tau^3)$

用中心差分

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{1}{2}\nu\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right) + \frac{1}{2}\nu^2\left(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n\right)$$

得 Lax-Wendroff（练习）

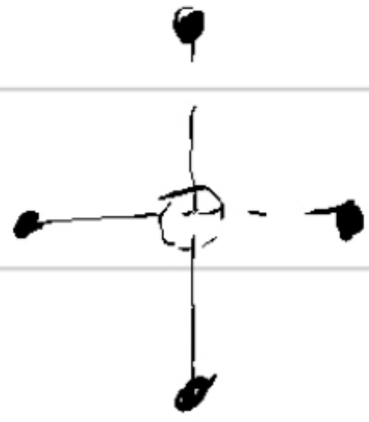
注：1. 也可构造出 Beam-Warming

2. 回忆，L-W，B-W 是二阶格式（思考：矛盾？）

多步法（用 U^{n+1}, U^n, U^{n-1} 等）

例：蛙跳（leap frog）

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^{n-1}}{2} + a\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = 0$$



局部截断误差 $T_j^m = O(h^2)$

CFL 条件 $|\nu| \le 1$

注：需要两层格式计算 U^1

◎ 三种格式的 von Neumann 分析（L^2 稳定性）

$$U_j^m = \lambda_k^m e^{ikjh}$$

(a) Lax-Wendroff

$$\lambda_k = 1 - i\nu \sin kh - 2\nu^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} kh$$

可证 满足CFL条件即 $|\nu| \le 1$ 时，L^2 稳定

(b) Beam-Warming

$$\lambda_k = e^{-ikh}\left[1 - 2(1-\nu)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}kh + 1 - i\nu \sin kh\right]$$

可证 满足CFL条件 $0 \le \nu \le 2$ 时，L^2 稳定 ($a>0$ 时)

(c) Leapfrog

$$\lambda_{k\pm} = -i\nu \sin(kh) \pm \sqrt{1 - \nu^2 \sin kh}$$

当 $|\nu| \le 1$ 时 L^2 稳定 且波型无衰减

数值耗散与色散

波方程的特解为 $e^{i(kx+\omega(k)t)} = e^{i(kx+\omega t)}$

这里 $\omega(k) \in \mathbb{R}$ 称为色散关系

eg 1. $u_t + au_x = 0$ $\omega(k) = -ak$

eg 2. Schrödinger $iu_t = -\frac{1}{2}u_{xx}$ $\omega = -\frac{1}{2}k^2$

由 $u(x,t) = e^{i(kx+\omega t)} = e^{ik(x+\frac{\omega}{k}t)} = F(x+\frac{\omega}{k}t)$

定义相速度 $c_p = -\frac{\omega(k)}{k}$，单个Fourier波型的速度

注意：不同的Fourier波型叠加后，形成波包

设 $k=k_0+\Delta k \quad |\Delta k| \ll k_0$

$$\omega(k)=\omega(k_0)+\omega'(k_0)(k-k_0)+O((k-k_0)^2)$$

则 $$e^{i(kx+\omega t)} \approx e^{i(kx+\omega(k_0)t-\omega'(k_0)k_0t+\omega'(k_0)kt)}$$

$$= e^{+i\omega(k_0)t-i\omega'(k_0)k_0t} e^{ik(x+\omega'(k_0)t)}$$

定义群速度 $c_g=-\omega'(k_0)$

eg. $u_t+au_x=0 \quad \omega=-ak \quad c_p=a \quad c_g=a$

eg. $iu_t=-\frac{1}{2}u_{xx} \quad \omega=-\frac{1}{2}k^2 \quad c_p=\frac{1}{2}k \quad c_g=k$

问：数值格式如何影响振幅，相速度，群速度？

$$U_j^m=\lambda_k^m e^{ikjh} \qquad \lambda_k \in \mathbb{C}$$

$|\lambda_k|-1 \approx ?$，离散色散关系 $\omega_h(k)=\frac{\arg(\lambda_k)}{\tau}$

① 迎风格式：$\lambda_k=(1-|\nu|)+|\nu|e^{-\mathrm{sgn}(a)ikh}$

$$|\lambda_k|^2=1-4|\nu|(1-|\nu|)\sin^2\tfrac{1}{2}kh$$

观察① 当 $|v|\le 1$ 时 $|\lambda_k|\le 1$

② 单步振幅衰减 $1-O(k^2h^2)$

t_{max} 固定时，需 $\frac{t_{max}}{\tau}$ 步

则 在 $t=t_{max}$ 时，振幅衰减 $(1-O(h))$

③ 高频(k大) 振幅衰减更快 $\Rightarrow$ "磨光"

注：分析 $\arg\lambda_k$ 知，相位误差较小 $O(k^2h^2)$

(相对于振幅)

② Lax-Wendroff $\lambda_k = 1 - iv\sin kh - 2v^2\sin^2\frac{1}{2}kh$

$$|\lambda_k|^2 = 1 - 4v^2(1-v^2)\sin^4(\tfrac{1}{2}kh)$$

观察：① 当 $|v|\le 1$ 时 $|\lambda_k|\le 1$

② $t=t_{max}$ 时 振幅衰减为 $1-O(h^3)$

$$arg(\lambda_k) = \underbrace{-ak\tau}_{\text{与真解一致}}\left[1 - \underbrace{\frac{1}{6}(1-\nu^2)k^2h^2}_{\text{误差主项}}\tau - \cdots\right]$$

观察：① 相位误差 $O(k^2h^2)$（比振幅低阶）

② 相速度变慢，高频更慢

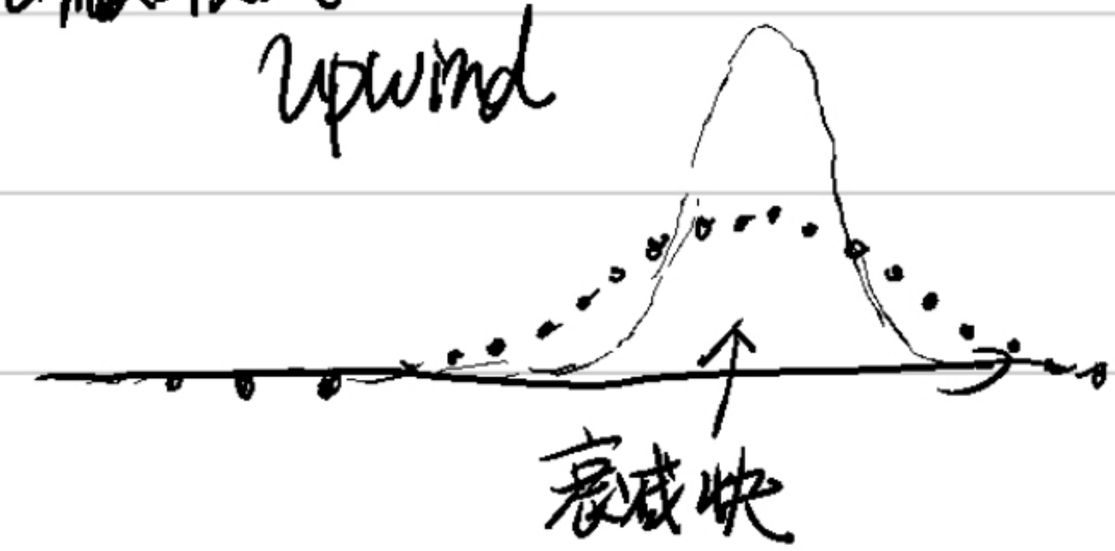
离散色散关系 $\omega_h(k) = \frac{arg(\lambda_k)}{\tau}$

离散群速度 $c_{gh}(k) = -\omega_h'(k)$

可计算 $kh \ll 1$ 时，离散群速度误差 ≈ 相速度误差×3

t_{max} 较大

upwind



Lax-Wendroff



注：1. 阅读 Beam-Warming，Leapfrog 的分析

2. 阅读 3.2.6 节，边界条件的处理

3. 参考 4.5 节，修正方程分析

※ 变系数情形，能量分析 246

模型 $u_t + a(x)u_x = 0$，$x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$，$t > 0$

$0 \le a(x) \le A$，$|a(x) - a(x)| \le C|x - x|$ (◎)

$\int u \cdot dx$，得

$$L.H.S. = \int u u_t \, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int u^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2$$

$$R.H.S. = -\int a u_x u \, dx = +\frac{1}{2}\int u(au)_x dx - \frac{1}{2}\int a u_x u dx$$

$$= \frac{1}{2}\int a_x u^2 dx$$

$$\le \frac{1}{2}\max_x |a_x| \, \|u\|_{L^2}^2$$

$\exists C$. s.t. $\|u(\cdot,t)\|_{L^2} \le \|u(\cdot,0)\|_{L^2} e^{Ct}$

迎风 $U_j^{m+1} = U_j^m - \frac{aτ}{h}(U_j^m - U_{j-1}^m)$ (△)

问：. 稳定性条件？ 即 $\exists K$ s.t.

$$\|U^{m+1}\| \le (1 + K\tau)\|U^m\|$$

注：1. 真解一般不满足最大值原理

2. $a(x)$ 变系数，von Neumann 分析不可用

定理4.4. 考虑 $U^{m+1} = U^m + \tau L_\Delta U^m$ (*)

若 $\exists k \geq 0, \eta(h)$ s.t. $\langle L_\Delta U, U \rangle \leq k\|U\|^2 - \eta \|L_\Delta U\|^2$

则 当 $\tau \leq 2\eta$ 时, $\exists K$, $\|U^{m+1}\| \leq (1+K\tau)\|U^m\|$

证明: $\|U^{m+1}\|^2 = \|(I+\tau L_\Delta)U^m\|^2$

$= \|U^m\|^2 + 2\tau \langle L_\Delta U^m, U^m \rangle + \tau^2 \|L_\Delta U^m\|^2$

$\leq (1+k\tau)\|U^m\|^2 + \tau(\tau - 2\eta)\|L_\Delta U^m\|^2$. 证

注: 可推广 $U^{m+1} = \sum_{k=1}^{k} \frac{(\tau L_\Delta)^i}{i!} U^m$

回到 迎风格式 (△) $L_\Delta = -\frac{a}{h}\Delta_x$

取 L 范数 $\langle U, V \rangle = \sum U_i V_i h$, $\|U\|_{L^2} = \langle U, U \rangle$

$\langle L_\Delta U, U \rangle = -\sum_j a_j (U_j - U_{j-1}) U_j = -\sum_j a_j U_j^2 + \sum_j a_j U_j U_{j-1}$

$h\|L_\Delta U\|_{L^2}^2 = \sum_j a_j^2 (U_j - U_{j-1})^2$

(由(⊙)) $\leq A\left[\sum_j a_j U_j^2 - 2a_j U_j U_{j-1} + a_j (U_{j-1})^2\right]$

则 $2\langle L_\Delta U, U\rangle + A^{-1}h \|L_\Delta U\|^2$

$\leq -\sum a_j[(U_j)^2-(U_{j-1})^2]$

(由(◎)) $=\sum(a_{j+1}-a_j)(U_j)^2 \leq \sum_j Ch(U_j)^2 = C\|U\|_{L^2}^2$

则有 $\langle L_\Delta U, U\rangle_{L^2} \leq \frac{C}{2}\|U\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}Ah^{-1}\|L_\Delta U\|_{L^2}^2$

则 当 $\tau \leq Ah^{-1}$ 时

迎风格式 L^2 稳定

注: ① $a(x)\equiv const$ 即有 CFL条件

② $a(x)$ 变系数时，强稳定性 ($|\lambda|\leq 1$)

减弱为 von Neumann 稳定 ($|\lambda|\leq 1+k\tau$)

一维双曲守恒律

$$\partial_t u + (f(u))_x = 0$$

或 $$\partial_t u + f'(u) u_x = 0$$ quasilinear 拟线性

$$u(x_0) = u^0(x)$$

特征线法 $$u_t + a(u) u_x = 0$$

特征线 $$\frac{dx}{dt} = a(u(x,t)) \quad x = x_0 \quad (1)$$

则 $u(x(t),t)$ 满足 (简记 $u(t) = u(x(t),t)$)

$$\frac{d}{dt} u(x(t),t) = u_t + \frac{dx}{dt} u_x = u_t + a(u) u_x = 0$$

即 $$\frac{d}{dt} u = 0 \qquad u(0) = u^0(x_0) \quad (2)$$

总之
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(u(t)) & x(0) = x_0 \quad --(1) \\ \frac{du}{dt} = 0 & u(0) = u^0(x_0) \quad -(2)' \end{cases}$$

由 (2) $$u(t) = u^0(x_0)$$

则 (1) 中 $$\frac{dx}{dt} = a(u^0(x_0))$$

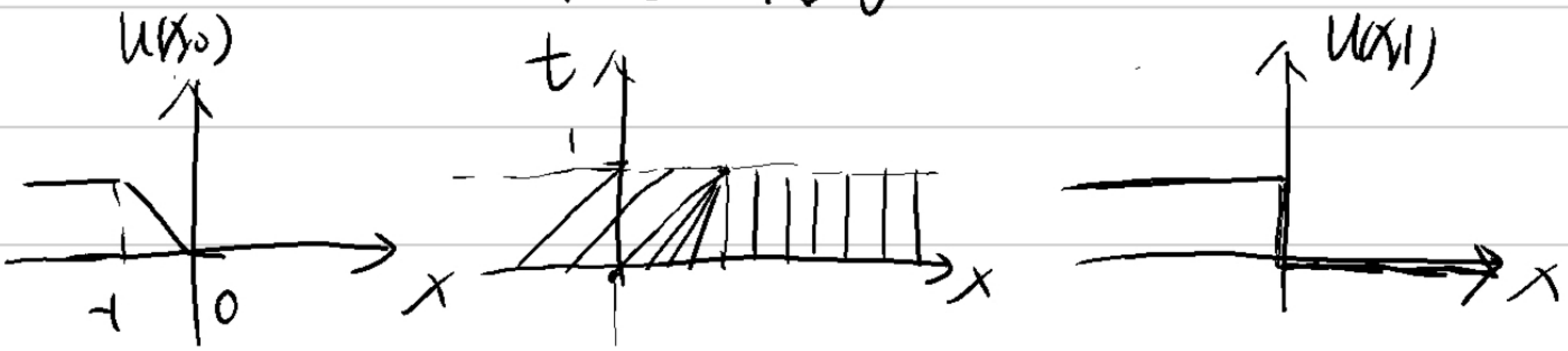
即有 $$x(t) = x_0 + a(u^0(x_0)) t$$

斜率由初值来定

例 无粘性 Burgers

$$u_t + u u_x = 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & x<-1 \\ -x & -1\le x\le 0 \\ 0 & x>0 \end{cases}$$ (练习)



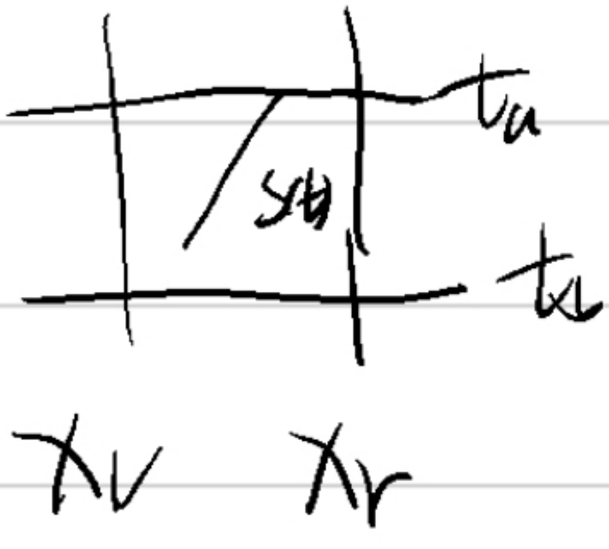
注：当 $t=1$ 时，特征线相交，古典解不存在

定义 一维守恒律初值问题

$$u_t + (f(u))_x = 0 \qquad u(x,0) = u^0(x)$$

弱解：u 满足 I.C. $\forall\ 0\le t_0\le t_a$ $\forall\ x_l<x_r$

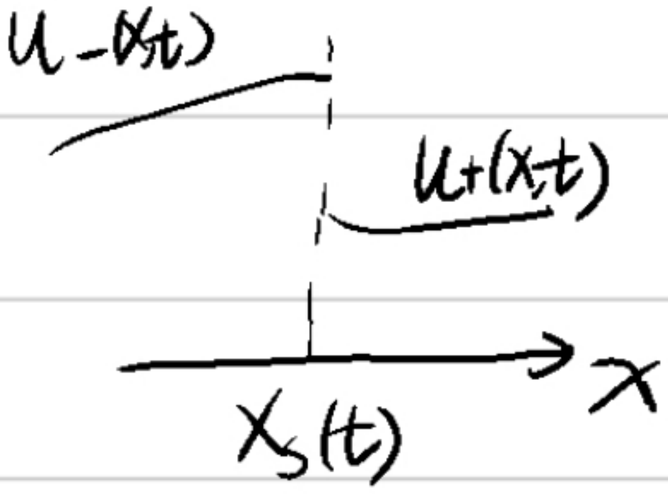
$$\int_{x_l}^{x_r} u(x,t_a)\,dx - \int_{x_l}^{x_r} u(x,t_b)\,dx + \int_{t_b}^{t_a} f(u(x_r,t))\,dx - \int_{t_b}^{t_a} f(u(x_l,t))\,dt = 0$$



注：允许激波（跳跃间断）

激波 shock

$\partial_t u + (f(u))_x = 0$



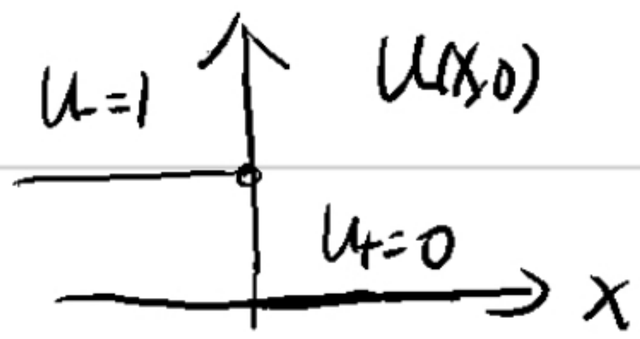
Rankine-Hugoniot (RH)

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = S = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}$$

e.g. Burgers $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ $\quad S = \frac{1}{2}(u_+ + u_-)$

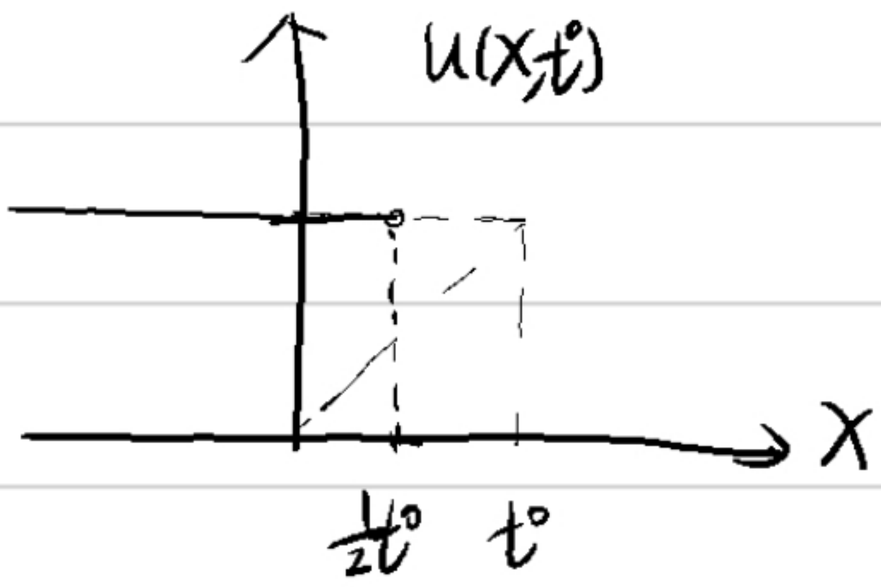
例 3.2 $\quad u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x = 0$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$



$S = \frac{1}{2}(u_+ + u_-) = \frac{1}{2}$ $\quad X_s(t) = \frac{1}{2}t$

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & x < \frac{t}{2} \\ 0 & x \geq \frac{t}{2} \end{cases}$$





注：① 弱解不唯一，见例3.3

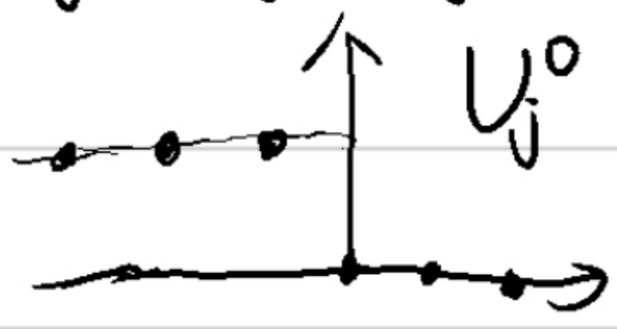
② 需要额外信息确定，如熵条件

数值格式

例3.4 first attempt $u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x = u_t + uu_x = 0$

(错的)迎风 $U_j^{n+1} = \begin{cases} U_j^n - \frac{\tau}{h} U_j^n (U_j^n - U_{j-1}^n), & 若\ U_j^n \geq 0 \\ U_j^n - \frac{\tau}{h} U_j^n (U_{j+1}^n - U_j^n), & 若\ U_j^n < 0 \end{cases}$

令 $U_j^0 = \begin{cases} 1 & j < 0 \\ 0 & j \geq 0 \end{cases}$



则 $U_j^{n+1} = U_j^1 = U_j^0 = \begin{cases} 1 & j < 0 \\ 0 & j \geq 0 \end{cases}$

可见，不收敛到激波解！

模型问题 $u_t + (f(u))_x = 0$

在 $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}] \times [t_m, t_{m+1}]$ 上积分得

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} [u(x, t_{m+1}) - u(x, t_m)]dx + \int_{t_m}^{t_{m+1}} [f|_{x=x_{j+\frac{1}{2}}} - f|_{x=x_{j-\frac{1}{2}}}]dt$$

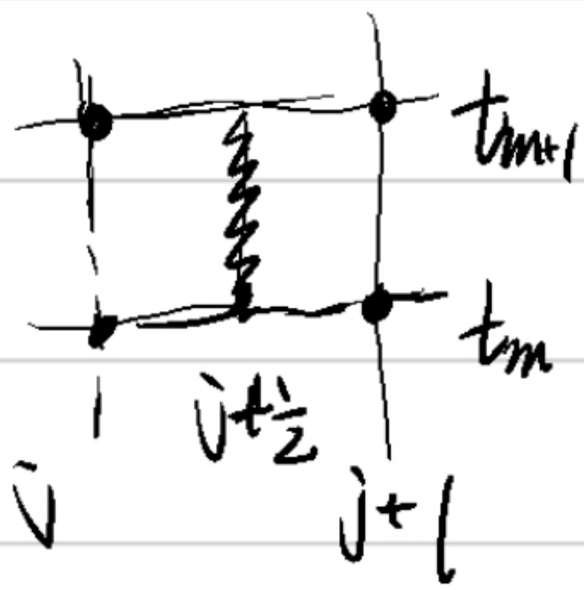
定义 $\overline{U}_j^m = \frac{1}{h}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t_m)dx$

$$\overline{f}_{j-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\tau}\int_{t_m}^{t_{m+1}} f|_{x=x_{j-\frac{1}{2}}} dt$$

则有 $$\overline{U}_j^{m+1} = \overline{U}_j^m - \frac{\tau}{h}\left(\overline{f}_{j+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} - \overline{f}_{j-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}\right)$$

数值通量 $F_{j\pm\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} \approx \overline{f}_{j\pm\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}$

不妨令 $F_{j+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} = F(U_{j+1}^m, U_j^m, U_{j+1}^{m+1}, U_j^{m+1})$



则得 守恒型差分格式（有限体积）

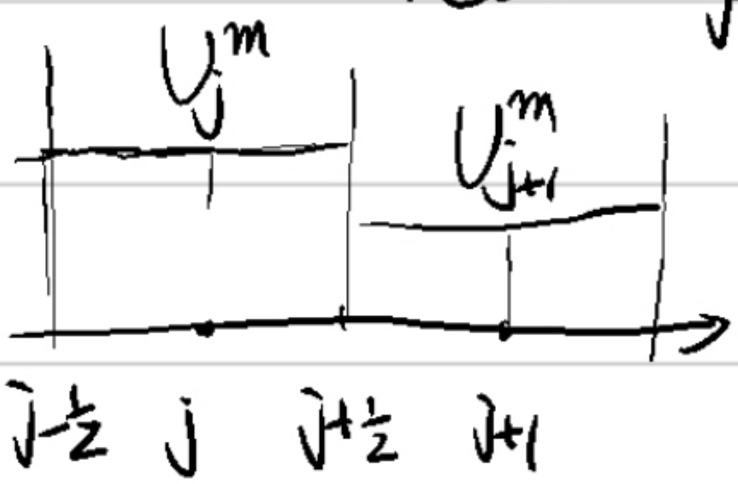
$$U_j^{m+1} = U_j^m - \frac{\tau}{h}\left(F_{j+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} - F_{j-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}\right)$$

易知：满足离散守恒律

注：例3.4 非守恒型

守恒型迎风格式 $u_t + (f(u))_x = u_t + f'(u)u_x = 0$

定义 $a_{j+\frac{1}{2}}^m = \begin{cases} \dfrac{f(U_{j+1}^m) - f(U_j^m)}{U_{j+1}^m - U_j^m} & \text{if } U_{j+1}^m \neq U_j^m \\ 0 & \text{if } U_{j+1}^m = U_j^m \end{cases}$

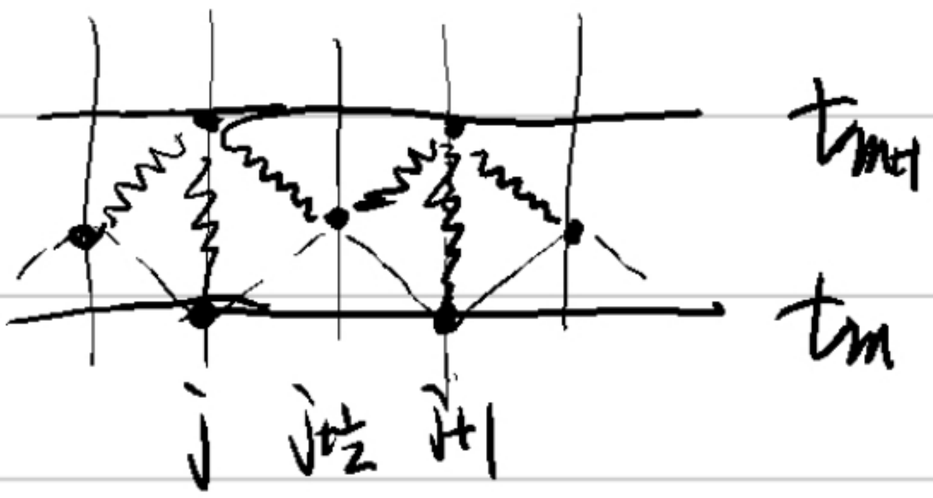


$$F_{j+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} = \begin{cases} f(U_j^m) & a_{j+\frac{1}{2}}^m \geq 0 \\ f(U_{j+1}^m) & a_{j+\frac{1}{2}}^m < 0 \end{cases}$$

注：满足CFL条件时 有一阶精度

高精度格式

法一 交错格点法 (Richtmyer)



$$U_{j+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(U_j^m + U_{j+1}^m) - \frac{\tau}{2h}[f(U_{j+1}^m) - f(U_j^m)]$$

$$U_j^{m+1} = U_j^m - \frac{\tau}{h}[f(U_{j+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}) - f(U_{j-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}})]$$

注：① 守恒型

② $f = au$ 时，变成 Lax-Wendroff.

法二 时间 Taylor 展开

$$u_j^{n+1} = \left[u + \tau u_t + \frac{1}{2}\tau^2 u_{tt}\right]_j^n + O(\tau^3)$$

$$u_t = -f(u)_x \qquad u_{tt} = \left[-(f(u)_x\right]_t$$

$$= -\left[f'(u)u_t\right]_x = \left[f'(u)(f(u)_x\right]_x$$

即 $$u_j^{n+1} = \left[u - \tau(f(u)_x + \frac{1}{2}\tau^2(f'(u)(f(u)_x)_x\right] + O(\tau^3)$$

令 $a_{j+\frac{1}{2}}^n = f'\left(\frac{1}{2}(u_j^n + u_{j+1}^n)\right)$，则得

Lax-Wendroff 格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{2h}\left[f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)\right]$$

$$+ \frac{\tau^2}{2h^2}\left[a_{j+\frac{1}{2}}^n\left(f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)\right) - a_{j-\frac{1}{2}}^n\left(f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n)\right)\right]$$

注：高阶格式可能产生振荡。

阅读 3.3.2. 初边值条件的处理

对流扩散方程 §3.4

$$u_t + a u_x = c u_{xx}$$

网格比 $\nu = \frac{a\tau}{h}$ (对流) $\mu = \frac{c\tau}{h^2}$ (扩散)

Peclet 数 $Pe = \frac{ah}{c} = \frac{\nu}{\mu}$

(I) 中心差分显格式 1(a) au_x 一阶差分

1(b) au_x Lax-Wendroff

2. cu_{xx} 中心差分

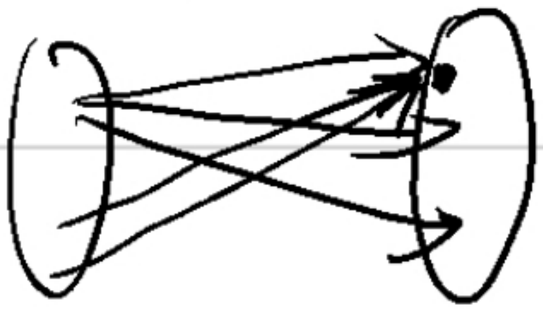
(II) 迎风 1. au_x 迎风

2. cu_{xx} 中心差分

(III) 隐格式 |q| 较大(对流占优) C-N

(IV) semi-Lagrangian 延特征线求解

修正方程分析 §4.5

微分方程  差分方程

一个差分格式(a) 相容地逼近 方程 A

可 更高阶地逼近 方程 A+修正项

例1. $u_t + a u_x = 0$, $a > 0$

迎风 $v_j^{m+1} = v_j^m + \frac{a\tau}{h}(v_j^m - v_{j-1}^m)$, $\nu = \frac{a\tau}{h}$

二阶修正 $\tilde{v}_t + a\tilde{v}_x = \frac{1}{2}ah(1-\nu)\tilde{v}_{xx} + O(\tau^2+h^2)$

注: ① $\frac{1}{2}ah(1-\nu)\tilde{v}_{xx} = O(h)$, $\nu \in [0,1]$ 时 带来耗散

② $\nu > 1$ 时, backward diffusion, 不稳定.

例2. $u_t + a u_x = c u_{xx}$

中心显格式 $\frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\tau} + a\frac{v_{j+1}^m - v_{j-1}^m}{h} = c\frac{v_{j+1}^m - 2v_j^m + v_{j-1}^m}{h^2}$

修正 $\tilde{v}_t + a\tilde{v}_x = \frac{1}{2}(2c - a^2\tau)\tilde{v}_{xx} + \cdots$

注: 稳定的必要条件 $a\tau^2 \le 2c$ (但不充分)

☆ 二阶波动方程的差分方法 §3.5

模型问题 $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ $x \in (0,1)$, $t>0$

I.C. $u(x,0)=u^0(x)$, $u_t(x,0)=v^0(x)$ $x \in [0,1]$

B.C. $u(0,t)=0$, $u(1,t)=0$ $t>0$

$a>0$ 波速

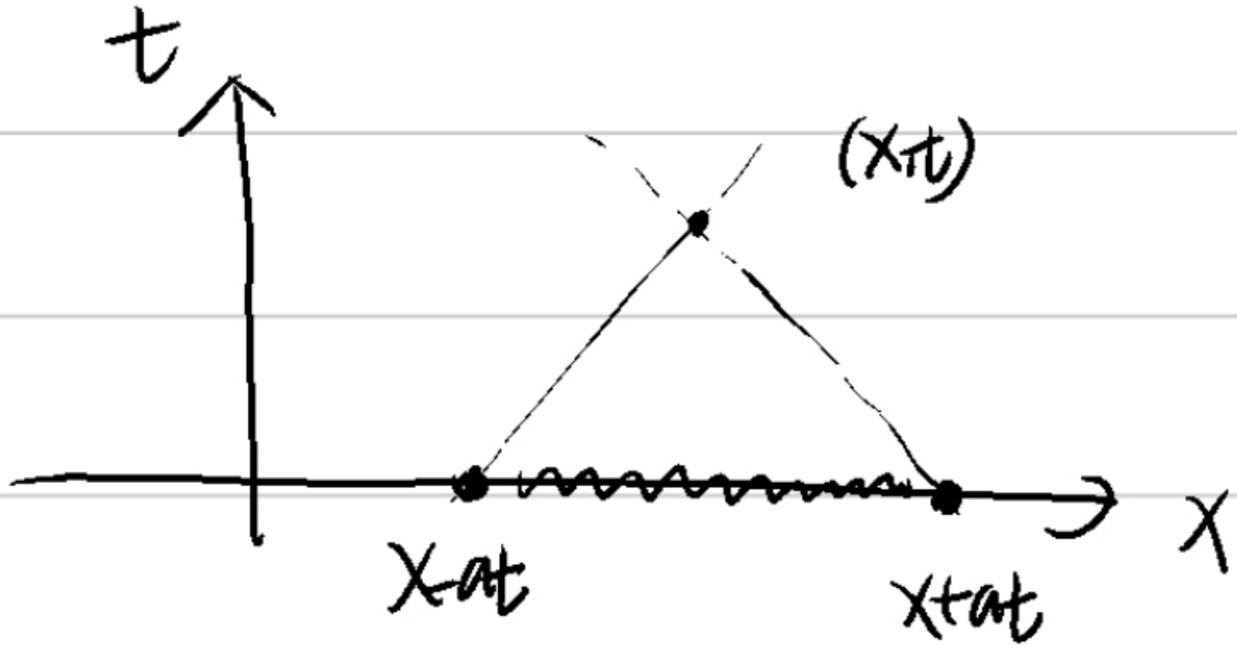
令 $v = u_t$ $w = -a u_x$

则有 $$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}_x = 0$$

特征速度 $\pm a$

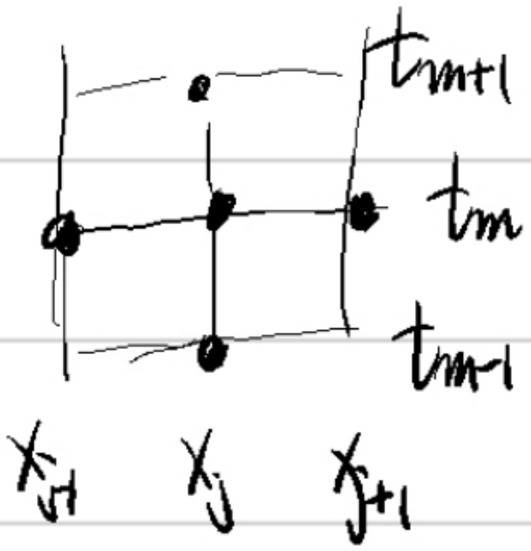
Cauchy 问题的解

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[w^0(x+at)+w^0(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} v^0(\xi)\,d\xi$$



② 显格式

$$\frac{U_j^{m+1}-2U_j^m+U_j^{m-1}}{\tau^2}=a^2\frac{U_{j+1}^m-2U_j^m+U_{j-1}^m}{h^2}$$



初始启动　设 $\nu=\frac{a\tau}{h}$（网格比）

$$u(x,\tau)=u(x,0)+\tau u_t(x,0)+\frac{\tau^2}{2}u_{tt}(x,0)+O(\tau^3)$$

$$=u^0(x)+\tau v^0(x)+\frac{\tau^2}{2}a^2u_{xx}(x,0)+O(\tau^3)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}U_j^0=u_j^0\\ U_j^1=U_j^0+\tau v_j^0+\frac{\nu^2}{2}\delta_x^2U_j^0\end{cases}$$

可知 ① 局部截断误差 $O(\tau^2+h^2)$

② 增长因子

$$\lambda_k=1-2\nu^2\sin^2\tfrac{1}{2}kh\pm 2i\nu\sin\tfrac{1}{2}kh\sqrt{1-\nu^2\sin^2\tfrac{1}{2}kh}$$

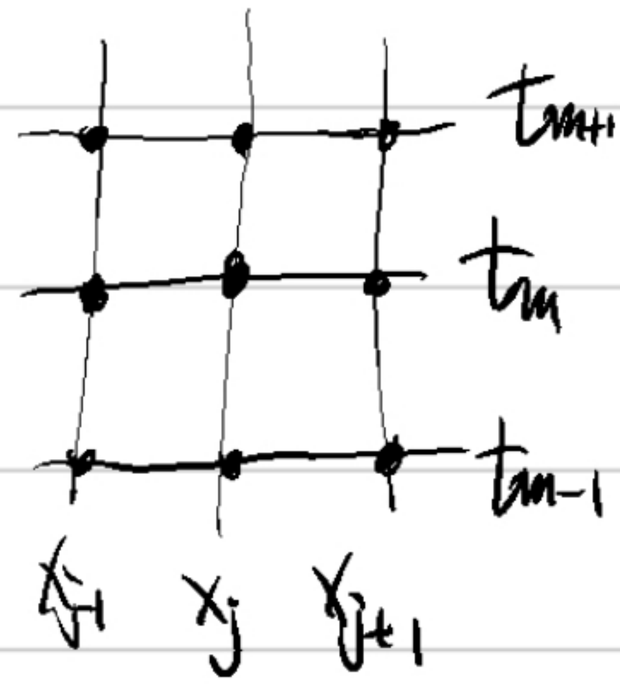
当满足CFL条件时 $\nu=\frac{a\tau}{h}\le 1$

$|\lambda_k|^2=1$，振幅无衰减，L^2 稳定

当 $\nu<1$ 时，相位误差 $O(kh^2)$

◎ 隐格式　取 $\theta \in [0,1]$

$$\frac{U_j^{m+1} - 2U_j^m + U_j^{m-1}}{\tau^2} = a^2\left[\theta \frac{\delta^2}{h^2} U_j^{m+1} + (1-2\theta)\frac{\delta^2}{h^2} U_j^m + \theta \frac{\delta^2}{h^2} U_j^{m-1}\right]$$



可知：① 局部截断误差 $O(\tau^2+h^2)$

② L^2 稳定性

$$\begin{cases} (1-4\theta)\nu^2 \le 1 & \text{当 } \theta < \frac{1}{4} \text{ 时} \\ \text{无条件} & \text{当 } \theta \ge \frac{1}{4} \text{ 时} \end{cases}$$

考虑变系数情形　$a(x) > 0$

$$u_{tt} = (a^2 u_x)_x \qquad x \in [x_L, x_R] = \Omega$$

令　$v = u_t \qquad w = -a u_x$

则　$v_t = -(aw)_x$

$$w_t = -a v_x$$

定义能量　$\int_\Omega \left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}w^2\right) dx = E(t)$

则 $\frac{d}{dt}E(t) = \int_\Omega (v v_t + w w_t)\,dx$

$= \int_\Omega [v(-(aw)_x) + w(-a v_x)]\,dx$

$= -avw\Big|_{x_l}^{x_r} + \int_\Omega (a w v_x - a w v_x)\,dx$

$= -avw\Big|_{x_l}^{x_r}$ （由边界条件决定）

可用能量衡量稳定性

设 $0 < A_0 \le a(x) \le A_1$ $\quad u_{tt} = (a u_x)_x$

考虑 θ 格式

$\tau^2 \delta_t^2 U_j^m = h^2 \Delta_x [a^2 \Delta_{+x}][\theta U_j^{m+1} + (1-2\theta) U_j^m + \theta U_j^{m-1}]$

其中 $\Delta_x(a^2 \Delta_{+x}) U_j^m = (a_j^m)^2 (U_{j+1}^m - U_j^m)$

$-(a_{j-1}^m)^2 (U_j^m - U_{j-1}^m)$

另外，注意 $U_j^{m+1} - U_j^{m-1} = \Delta_t U_j^{m+1} + \Delta_t U_j^m$ ——(1)

而 $\delta_t^2 U_j^m = U_j^{m+1} - 2U_j^m + U_j^{m-1}$

$= \Delta_t U_j^{m+1} - \Delta_t U_j^m$ ——(2)

定义网格函数内积（U, V 取零边值）

$\langle U, V \rangle_{L^2} = \sum_{j=1}^{N} U_j V_j h \xrightarrow{\text{分片常数重构}} \int_0^1 UV\,dx$ ——(3)

于是定义 $\|U\|_{L^2}^2 = \langle U, U\rangle_{L^2}$ ——(4)

对于(零边值)网格函数 U, V

有 $\langle \Delta_x U, V\rangle = h\sum_{j=1}^{NH}(U_j - U_{j-1})V_j$

$= h\sum_{j=1}^{N-1} U_j V_j - h\sum_{j=1}^{N-1} U_{j-1}V_j$

$= h\sum_{j=1}^{NH} U_j V_j - h\sum_{j=1}^{NH} U_j V_{j+1}$

$= \langle U, \Delta_{+x} V\rangle$ ——(5)

即分部求和公式

下面建立 θ 格式的能量估计

$$\tau^2 \delta_t^2 U_j^m = h^2 \Delta_x[a^2 \Delta_{+x}][\theta U_j^{m+1} + (1-2\theta)U_j^m + \theta U_j^{m-1}]$$

两边乘以 $h(U_j^{m+1} - U_j^{m-1})$, 关于 $j=1,\cdots,N-1$ 求和

由①②, $L.H.S. = \tau^{-2}\|\Delta_{-t}U^{m+1}\|_{L^2}^2 - \tau^{-2}\|\Delta_{+t}U^{m-1}\|_{L^2}^2$

$R.H.S. = \theta h^2 \langle \Delta_x(a^2\Delta_{+x})(U^{m+1}+U^{m-1}), U^{m+1}-U^{m-1}\rangle_{L^2}$ —— (I)

$+ (1-2\theta)h^2 \langle \Delta_x(a^2\Delta_{+x})U^m, U^{m+1}-U^{m-1}\rangle_{L^2}$ —— (II)

由分部求和公式

$$(I) = -\theta h^2 \langle a\Delta_{+x}(U^{n+1}+U^{n-1}),\ a\Delta_{+x}(U^{n+1}-U^{n-1})\rangle$$

$$= -\theta h^2 \left(\|a\Delta_{+x}U^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|a\Delta_{+x}U^{n-1}\|_{L^2}^2 \right)$$

$$(II) = -(1-2\theta)h^2 \langle a\Delta_{+x}U^n,\ a\Delta_{+x}(U^{n+1}-U^{n-1})\rangle$$

(由 $ab = \frac{1}{4}((a+b)^2-(a-b)^2)$)

$$= -\frac{1-2\theta}{4}h^2 \left[\|a\Delta_{+x}(U^n+U^{n+1})\|_{L^2}^2 - \|a\Delta_{+x}(U^{n+1}-U^n)\|_{L^2}^2 \right.$$

$$\left. -\|a\Delta_{+x}(U^n+U^{n-1})\|_{L^2}^2 + \|a\Delta_{+x}(U^n-U^{n-1})\|_{L^2}^2 \right]$$

令 $S_n = \frac{1}{2}\|\Delta_t U^n\|_{L^2}^2 + \theta h^2 \left[\|a\Delta_{+x}U^n\|_{L^2}^2 + \|a\Delta_{+x}U^{n-1}\|_{L^2}^2 \right]$

$$+ \frac{1-2\theta}{4}h^2 \left[\|a\Delta_{+x}(U^n+U^{n-1})\|_{L^2}^2 + \|a\Delta_{+x}(U^n-U^{n-1})\|_{L^2}^2 \right]$$

(由 $a^2+b^2 = \frac{1}{2}[(a+b)^2+(a-b)^2]$)

$$= \|\frac{\Delta_t}{2}U^n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\|a\frac{\Delta_{+x}}{h}(U^n+U^{n-1})\|_{L^2}^2$$

$$+ \frac{4\theta-1}{4}\|a\frac{\Delta_{+x}}{h}(U^n-U^{n-1})\|_{L^2}^2$$

则 $S_{n+1} = S_n = \cdots = S_1$

回顾 $E=\int_0^1[\frac{1}{2}(u_t)^2+\frac{1}{2}(au_x)^2]dx$

目标：合理定义能量范数 $\|\cdot\|_E$

s.t. 日格式满足能量不能式：

$\exists K_1$ s.t. $\|U^m\|_E^2 \le K_1\|U\|_E^2$, $\forall m\ge 1$

在 S_m 中，需处理 $\frac{4\theta-1}{4}\|a\frac{\Delta t}{h}(U^m-U^{m-1})\|_{L^2}^2$

思路：用 $\|\Delta_t U^m\|$ 控制

令 T_{+x} 为移位算子 Id 为恒等算子

$\Delta_{+x}=T_{+x}-Id$，由 $A_0<a<A_1$

$\|a(U^m-U^{m-1})\|_{L^2}^2 \le A_1^2\|U^m-U^{m-1}\|_{L^2}^2 = A_1^2\|\Delta_t U^m\|_{L^2}^2$

同理 $\|aT_{+x}(U^m-U^{m-1})\|_{L^2}^2 \le A_1^2\|\Delta_t U^m\|_{L^2}^2$

由 $(a+b)^2\le 2a^2+2b^2$

则 $\|a\Delta_{+x}(U^m-U^{m-1})\|_{L^2}^2 \le 4A_1^2\|\Delta_t U^m\|^2$.

当 $0\le\theta<\frac{1}{4}$ 时，S_m 中 $\frac{4\theta-1}{4}<0$，则

$$S_1 \le \left\| \frac{\Delta t}{2} U^1 \right\|_2^2 + t \frac{A_1^2}{4} \left\| \frac{\Delta t}{h} (U+U^0) \right\|_2^2$$

另方面 设 $\bar{v} = \frac{\tau}{h}$ (网格比)

$$S_m \ge \underbrace{[1 - A_1^2 (1+\theta) \bar{v}^2]} \left\| \frac{\Delta t}{2} U^m \right\|_{L^2}^2 + \frac{A_0^2}{4} \left\| \frac{\Delta t}{h} (U^m + U^{m-1}) \right\|_{L^2}^2$$

则 只需 网格比 $\bar{v} = \frac{\tau}{h} < \frac{1}{A_1 \sqrt{1+\theta}}$，能量不等式成立

类似，当 $\frac{1}{4} \le \theta \le 1$ 时，能量不能式无条件成立.

※基于一阶方程组 $u_t + A u_x = 0$

法一 先对角化 $w_t + \Lambda w_x = 0$

法二 Lax-Wendroff

$$u_j^{n+1} = \left[u + \tau u_t + \frac{1}{2} \tau^2 u_{tt} \right]_j^n + O(\tau^3)$$

$$= \left[u - \tau A u_x + \frac{1}{2} \tau^2 A^2 u_{xx} \right]_j^n + O(\tau^3)$$

法三 交错型蛙跳 $\gamma = \frac{a\tau}{h}$

V 半时 整空 $V_j^{n+\frac{1}{2}}$，W 整时，半空 $W_{j+\frac{1}{2}}^n$

$$\begin{cases} \delta_t V_j^n + \gamma \delta_x W_j^n = 0 \\ \delta_t W_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \gamma \delta_x V_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = 0 \end{cases}$$