4. 差分方法的延伸与拓展

※ 发展方程的一般形式

$$\begin{cases} u_t = \mathcal{L}u + f & (x,t) \in \Omega \times (0, t_{max}] \\ \text{I.C.} \quad u(x,0) = u^0(x) & x \in \Omega \\ \text{B.C.} \quad \mathcal{G}(u(x,t)) = g_0(x,t) & (x,t) \in \partial\Omega \times (0, t_{max}] \end{cases}$$

定义：适定性 (1) 解的存在性

(2) 解对初值的连续依赖性.

$\exists\ C$ s.t. $\|v(\cdot,t) - w(\cdot,t)\| \leq C \|v(\cdot,0) - w(\cdot,0)\|$

※ 差分格式 $B_1 U^{m+1} = B_0 U^m + F^m$ (B_1 可逆)

B_1^{-1} 一致良态 $\|B_1^{-1}\| \leq K$ (注意 $B_1 = O(\tau^{-1})$)

此时 差分格式一致可解

$$U^{m+1} = B_1^{-1} B_0^m + F^m$$

☆ 相容性与收敛性

截断误差：令 u 是真解

$$T^m = B_1 u^{m+1} - (B_0 u^m + F^m)$$

相容：　真解光滑时

(a) $T^m \to 0 \quad \tau(h) \to 0, \quad \forall m\tau \le t_{max} \ \forall j \in J_{sz}$

(b) $\tau \sum_{l=0}^{m-1} \|T^l\| \to 0, \quad \tau(h) \to 0, \quad \forall m\tau \le t_{max}$

(c) $T^m = O(\tau^p + h^q)$　时间 p 阶，空间 q 阶.

收敛：　$\|V^m - u^m\| \to 0 \quad \tau(h) \to 0$

☆ 稳定性

$$\begin{cases} B_1 V^{m+1} = B_0 V^m + F^m & \text{I.C. } V^0 \\ B_1 W^{m+1} = B_0 W^m + F^m & \text{I.C. } W^0 \end{cases}$$

$\exists$ 与加密路径 $\tau(h)$，初值 V^0, W^0 无关的常数 k_1，

s.t. $\|V^m - W^m\| \le k_1 \|V^0 - W^0\|, \ \forall m\tau \le t_{max}$. (4.3.1)

易知 $V^{m+1} - W^{m+1} = B_1^{-1} B_0 (V^m - W^m)$，则 (4.3.1)

$\Leftrightarrow \|(B_1^{-1} B_0)^m\| \le k_1, \quad \forall m\tau \le t_{max}$ (4.3.2)

※ Lax 等价定理. 对于一个适定的线性发展问题的一致可解的相容的线性差分格式，

收敛性 $\Leftrightarrow$ 稳定性.

证明：稳定 $\Rightarrow$ 收敛

$B_1(U^{m+1}-u^{m+1})=B_0(U^m-u^m)+T^m$，易证

收敛 $\Rightarrow$ 稳定

目标 $((B_1)^{-1}B_0)_h^m$ 的一致有界性. h 为网格尺度

$\forall u_0$, $S_{tmax}=\sup\limits_{h>0,\,m\tau\le t_{max}}\|((B_1)^{-1}(B_0))_h^m u^0\|<\infty$

反证：若 $\exists u^0$ s.t. $S_{tmax}=\infty$

不妨设存在序列 $\tau_k\to 0$ $n_k\tau_k\to t\in[0,t_{max}]$

s.t. $\lim\limits_{k\to\infty}\|(B_1^{-1}B_0)_{h_k}^{n_k}u_0\|=\infty$

令 u, U 为 u_0 为初值的真解与数值解

w, W 为 $w_0=0$ 为初值的真解与数值解

则 $e_n^m = U_n^m - W_n^m$ 满足齐次问题

$U_n^m - W_n^m = e_n^m = (B_0^{-1}B_1)_n e_n^{m-1} = (B_0^{-1}B_1)_n^m e_n^0 = (B_0^{-1}B_1)_n^m u^0$

注意到 $L.H.S. = U_n^m - u^m + u^m - w^m + w^m - W_n^m$

其中，由收敛性

$$\lim_{k\to\infty} \| U_{n_k}^{m_k} - u^{m_k} \| + \| w^{m_k} - W_{n_k}^{m_k} \| = 0$$

又由 解对初值的连续依赖，$\exists C$，

s.t. $\| u^m - w^m \| \le C \| u^0 - w^0 \| = C \| u^0 \|$

则有 $\lim_{k\to\infty} \| (B_0^{-1}B_1)_{n_k}^{m_k} u^0 \| \le C \| u^0 \|$

这与假设矛盾，即证。

阅读 3.4.4 Von Neumann 条件 $|\lambda_k| \le 1 + k\tau$

强稳定性条件 $|\lambda_k| \le 1$.

※ 混合型方程

模型问题 对流反应方程 $a>0$

$$u_t + a u_x = -\lambda u \qquad u(x,0)=\eta(x)$$

真解： $u(x,t) = e^{-\lambda t}\eta(x-at)$ 特征线法

数值方法： ① 非分裂法 （如第三章）

② 分数步长法（算子分裂法）

一般地 $u_t = Au + Bu$ （eg. $A=-a\partial_x$, $B=-\lambda$）

假设 A,B 中不显含 t， $\partial_t Au = A\partial_t u$， $\partial_t Bu = B\partial_t u$

则 $u_{tt} = (A+B)u_t = (A+B)^2 u$

类似地 $\forall j\in N$ $\partial_t^j u = (A+B)^j u$

$$u(x,k) = u(x,0) + k(A+B)u(x,0) + \frac{1}{2!}k^2(A+B)^2 u(x,0) + \cdots$$

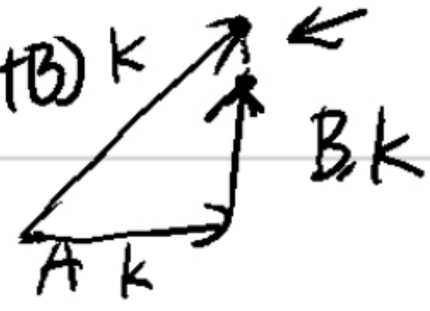
$$= \sum_{j=1}^{\infty} k^j \frac{1}{j!}(A+B)^j u(x,0)$$

（形式定义） $= \exp(k(A+B))\,u(x,0)$

不妨假设我们已分别会算子问题

$u_t = Au$, $u_t = Bu$ 分裂误差？

分数步长法（一阶） $k=\Delta t$



$$u^*(x,k) = e^{kA}u(x,0)$$

$$u^{**}(x,k) = e^{kB}u^*(x,k) = e^{kB}e^{kA}u(x,0)$$

模型问题 $u_t + au_x = -\lambda u$

子问题 $u_t + au_x = 0$ $u_t = -\lambda u$

数值格式 $u_j^* = u_j^n - \frac{ak}{h}(u_j^n - u_{j-1}^n)$, $u_j^{n+1} = u_j^* - k\lambda u_j^*$

分裂误差

$$u(x,k) - u^{**}(x,k) = (e^{k(A+B)} - e^{kB}e^{kA})u(x,0)$$

$$e^{k(A+B)} = I + k(A+B) + \frac{1}{2}k^2(A+B)(A+B)t - \cdots$$

$$= I + k(A+B) + \frac{1}{2}k^2(A^2+AB+BA+B^2) + \cdots$$

$$e^{kBkA} = (I + kB + \frac{k^2}{2}B^2 + \cdots)(I + kA + \frac{k^2}{2}A^2 + \cdots)$$

$$= I + k(A+B) + \frac{1}{2}k^2(A^2+B^2+2BA) + \cdots$$

$$\Rightarrow u(x,k) - u^{**}(x,k) = \frac{1}{2}k^2(AB-BA)u(x,0) + O(k^3)$$

(case (a)　　$A=-a\partial_x$　　$B=-\lambda$　　($\lambda=$const)

则　$AB=BA=a\lambda\partial_x$

可证 没有分裂误差

(case (b)　　$A=-a\partial_x$　　$B=-\lambda(x)$

$(AB-BA)u=+a\partial_x(\lambda u)-a\lambda\partial_x u=a\lambda'(x)u$

$\Rightarrow u(x,k)-u^{**}(x,k)=\frac{1}{2}k^2 a\lambda'(x)u(x,0)+O(k^3)$

一般地：① 单步引入 $O(k^2)$ 算子分裂误差

② 经过 $\frac{t_{max}}{k}$ 步累积，$O(k)$ 分裂误差.

Strong Splitting　(二阶)

$u_t=Au+Bu$

用　$e^{\frac{1}{2}kA}e^{kB}e^{\frac{1}{2}kA}$ 去逼近 $e^{k(A+B)}$

$$e^{\frac{1}{2}kA}e^{kB}e^{\frac{1}{2}kA}$$

$$=\left(I+\tfrac{1}{2}kA+\tfrac{1}{8}k^2A^2+\cdots\right)\left(I+kB+\tfrac{1}{2}k^2B^2+\cdots\right)\left(I+\tfrac{1}{2}kA+\tfrac{1}{8}k^2A^2+\cdots\right)$$

$$= I+k(A+B)+\tfrac{1}{2}k^2(A^2+B^2+AB+BA)+O(k^3)\cdots$$

可证(练习) $e^{\frac{1}{2}kA}e^{kB}e^{\frac{1}{2}kA}-e^{k(A+B)}=O(k^3)$

在算法实现中

$$u^m=\left(e^{\frac{1}{2}kA}e^{kB}e^{\frac{1}{2}kA}\right)^m u^0$$

$$=\underbrace{e^{\frac{1}{2}kA}e^{kB}e^{kA}\cdots e^{kA}e^{kB}e^{\frac{1}{2}kA}}_{2m+1\text{ 步}}u^0$$

① 计算量与一阶算法类似

② 一般有二阶精度

可推广: (a) $u_t=(A+B+C)u$

(b) 更高阶分裂 Cmk^m

(但有可能阶数更高,误差不减,因为 Cm 变大)

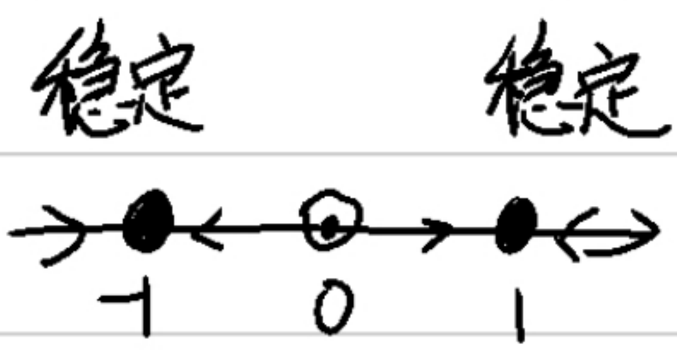
☆ 非线性方程选讲

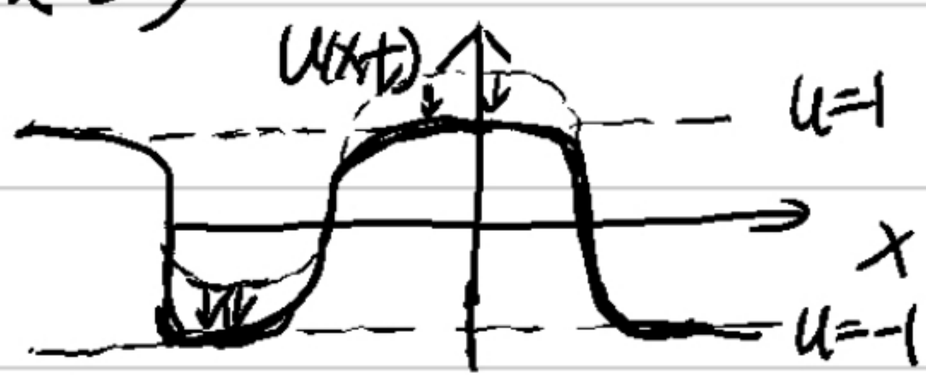
Allen-Cahn 方程

$$u_t = \Delta u + \kappa^2 f(u), \quad f(u) = (u^2-1)u$$

反应-扩散方程. (半线性)

$\dot{u} = f(u)$





能量 $E(u) = \int \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \kappa^2 F(u)\,dx, \quad F'(u) = f(u)$

变分, 得 $\frac{\delta E}{\delta u} = -\Delta u + f(u)$

Allen-Cahn 方程有梯度流结构

$$u_t = -\delta E / \delta u$$

能量耗散 (忽略边界项)

$$\frac{d}{dt}E(u) = \int [-\Delta u\, u_t + \kappa^2 f(u)\, u_t]\,dx$$

$$= -\| -\Delta u + \kappa^2 f(u) \|_{L^2}^2 \le 0$$

等号成立时，得平衡态/能量的临界点

$$u_t = 0 \iff \delta E/\delta u = -\Delta u + f(u) = 0$$

目标设计保持能量耗散(稳定)的数值格式.

法一：
- $f(u)$ 非线性，显式
- Δu 刚性，隐式

半离散格式

$$\frac{1}{k}(u^{n+1} - u^n) = \Delta u^{n+1} + f(u^n)$$

能量分析 $\int \cdot (u^{n+1} - u^n)\, dx$，得

(☆)
$$\frac{1}{k}\|u^{n+1} - u^n\|_{L^2}^2 = -\langle \nabla u^{n+1}, \nabla u^{n+1} - \nabla u^n \rangle \quad \text{---- (II)}$$

$$- k^2 \langle f(u^n), u^{n+1} - u^n \rangle \quad \text{---- (III)}$$

对(II)使用 $a(a-b) = \frac{1}{2}(a^2 + (a-b)^2 - b^2)$

$$\langle \nabla u^{n+1}, \nabla u^{n+1} - \nabla u^n \rangle = \frac{1}{2}\left[\|\nabla u^{n+1}\|^2 + \|\nabla u^{n+1} - \nabla u^n\|^2 - \|\nabla u^n\|^2 \right]$$

另一方面 令 $\widetilde{F}(u^m)=\int F(u^m)\,dx$

$$\widetilde{F}(u^{m+1})-\widetilde{F}(u^m)\le \langle -f(u^{m+1}),u^{m+1}-u^m\rangle$$

$$\le \frac{1}{2}\sup_x|f(u)|\,\|u^{m+1}-u^m\|_{L^2}^2$$

可由最值原理知，$\exists M$ s.t. $\sup_x|f(u)|<M$

定义：半离散能量 $E^m=\frac{1}{2}\|\nabla u^m\|_{L^2}^2+\widehat{F}(u^m)$

则由 (⊗) 知

$$E^{m+1}-E^m\le -\frac{1}{k}\|u^{m+1}-u^m\|_{L^2}^2-\frac{1}{2}\|\nabla u^{m+1}-\nabla u^m\|_{L^2}^2$$

$$+\frac{1}{2}k^2\sup_x|f(u)|\,\|u^{m+1}-u^m\|_{L^2}^2$$

则 当 $-\frac{1}{k}+\frac{1}{2}k^2\sup_x|f(u)|\le 0$，即

$k\le \frac{2}{k^2}(\sup_x|f(u)|)^{-1}$ 时，能量递减

法二：凸分裂 $u_t=-\frac{\delta E}{\delta u}$

假设 $E=E_c-E_e$，E_c,E_e 凸

则 $\frac{1}{k}(u^{n+1}-u^n)=-(\frac{\delta E_c}{\delta u})^{n+1}+(\frac{\delta E_e}{\delta u})^n$ (△)

是能量稳定的.

证明：注意 当 $E(u)$ 是凸的



$$E(u') - E(u) \geq \left\langle \frac{\delta E}{\delta u}, u' - u \right\rangle$$

即 $$E(u') - E(u) \leq -\left\langle \frac{\delta E}{\delta u}, u - u' \right\rangle = \left\langle \frac{\delta E}{\delta u}, u' - u \right\rangle$$

则 $E = E_c - E_e$ ， E_c, E_e 凸时

$$E(u^{n+1}) - E(u^n)$$

$$= E_c(u^{n+1}) - E_e(u^{n+1}) - E_c(u^n) + E_e(u^n)$$

$$= E_c(u^{n+1}) - E_c(u^n) + E_e(u^n) - E_e(u^{n+1})$$

$$\leq + \left\langle \left(\frac{\delta E_c}{\delta u}\right)^{n+1}, u^{n+1} - u^n \right\rangle - \left\langle \left(\frac{\delta E_e}{\delta u}\right)^n, u^{n+1} - u^n \right\rangle$$

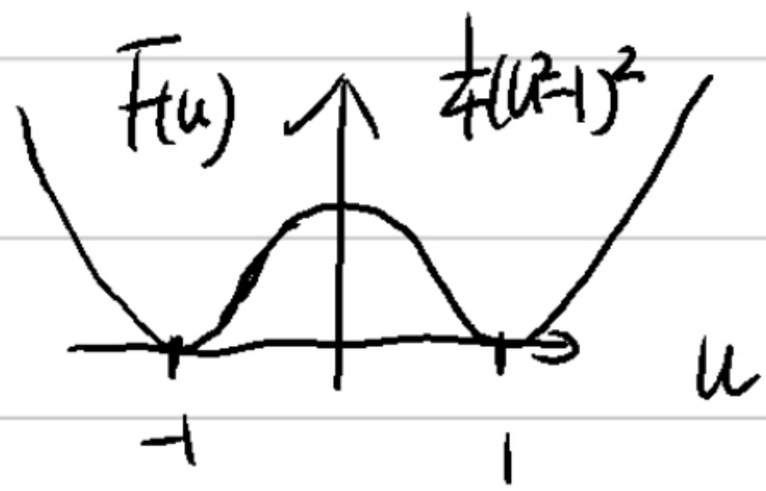
由(△) $$= -\frac{1}{k} \| u^{n+1} - u^n \|^2 \leq 0$$

回到 Allen-Cahn 方程

$$E = \int \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \kappa^2 F(u)\, dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \kappa^2 s u^2 \right. \quad \text{--- 凸}$$

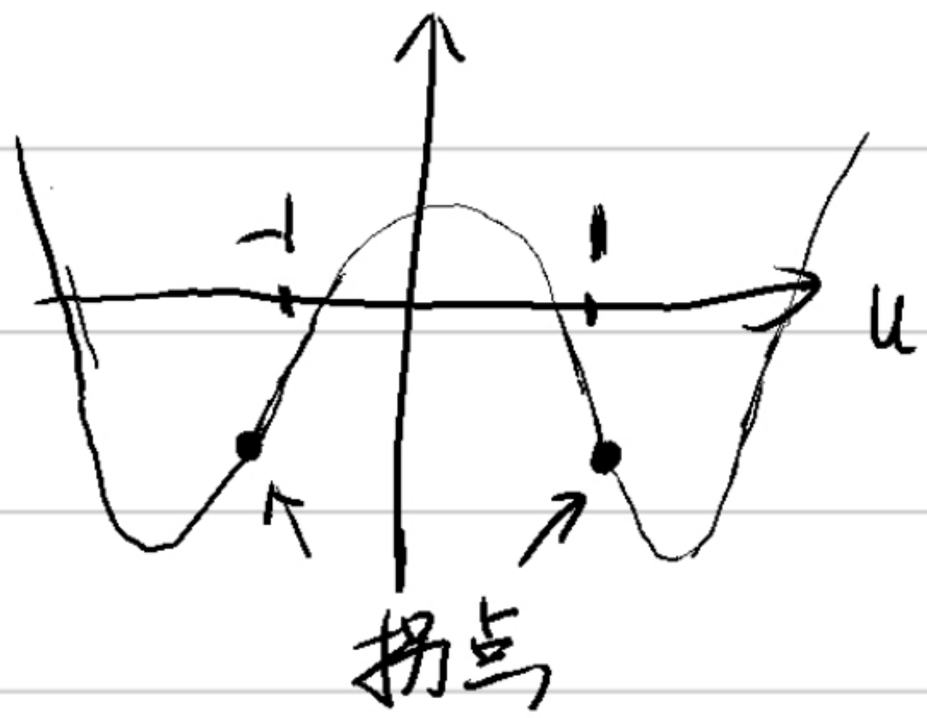
$$\left. + \kappa^2 \left(F(u) - \frac{1}{2} s u^2 \right) \right] dx \quad \text{--- } (-E_e)$$



例 当 $u_0 \in [-1,1]$ 时，恒有 $u(x,t) \in [-1,1]$

则 $\exists S>0$，s.t. $E_c(u)$ 对 $u \in [-1,1]$ 凸

$F(u)-\frac{1}{2}Su^2$ (e.g. $S=5$)



则有稳定化的格式

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{k} = -\Delta u^{n+1} - k^2 S u^{n+1} + k^2 S u^n - k^2 f(u^n)$$