6. 椭圆边值问题的有限元方法

模型问题 Ω 有界连通 $\partial\Omega$ Lipschitz

$$(D)\quad \begin{cases} -\Delta u = f, & x\in\Omega \\ u=0, & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

(V) 求 $u\in H_0^1(\Omega)$ s.t. $a(u,v)=(f,v)\quad \forall v\in H_0^1(\Omega)$

其中 $a(u,v)=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx$, $(f,v)=\int_\Omega fv\,dx$.

(M) 求 $u\in H_0^1(\Omega)$ s.t. $J(u)=\min\limits_{v\in H_0^1(\Omega)} J(v)$

其中 $J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-(f,v)$

$u\in$ 试探函数空间, $v\in$ 检验函数空间.

数值逼近：构造有限维子空间 $V_h(\Omega)$

Galerkin 方法：

(V_h) 求 $u_h\in V_h(\Omega)$ s.t. $a(u_h,v_h)=(f,v_h)$, $\forall v_h\in V_h(\Omega)$.

Ritz 方法

(M_h) 求 $u_h\in V_h(\Omega)$ s.t. $J(u_h)=\min\limits_{v_h\in V_h(\Omega)} J(v_h)$

设 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_h}$ 是 $V_h(\Omega)$ 的一组基

令 $u_h = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j$, $v_h = \sum_{j=1}^{N_h} v_j \varphi_j$

则 $(V_h) \Leftrightarrow$

求 $u_h = (u_1, \cdots, u_{N_h})^T \in \mathbb{R}^{N_h}$ s.t.

$$\sum_{j=1}^{N_h} a(\varphi_j, \varphi_i) u_j v_i = \sum_{i=1}^{N_h} (f, \varphi_i) v_i, \quad \forall (v_1, \cdots, v_{N_h})^T \in \mathbb{R}^{N_h}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{N_h} a(\varphi_j, \varphi_i) u_j = (f, \varphi_i) \qquad i = 1, \cdots, N_h.$$

$\Leftrightarrow$ 矩阵形式 $K u_h = f$

其中（由力学背景）

- $K = (k_{ij}) = (a(\varphi_j, \varphi_i))$ 刚度矩阵 (stiffness)
- u_h 位移向量
- $f = (f_i) = ((f, \varphi_i))$ 载荷向量 (load)

易知：K 正定，u_h 解存在且唯一

有限元方法：一种构造子空间的方法

FEM 举例：分片线性连续

设 $\Omega \subset \mathbb{R}$ 为多边形区域


(√)


(×)

Step1 对 Ω 三角形剖分 $\mathcal{T}_h(\Omega)$

单元：三角形 T_e, $e=1,\cdots,M$

最大直径：$h = \max\limits_{1\le i\le M} \sup\limits_{x,y\in T_i} \|x-y\|$

节点：A_i, $i=1,\cdots,N$

Step2 定义有限元函数空间

$$V_h = \{ u\in C(\bar{\Omega}) ;\ u|_{T_i}\in P_1(T_i),\ \forall T_i\in \mathcal{T}_h(\Omega)\}$$

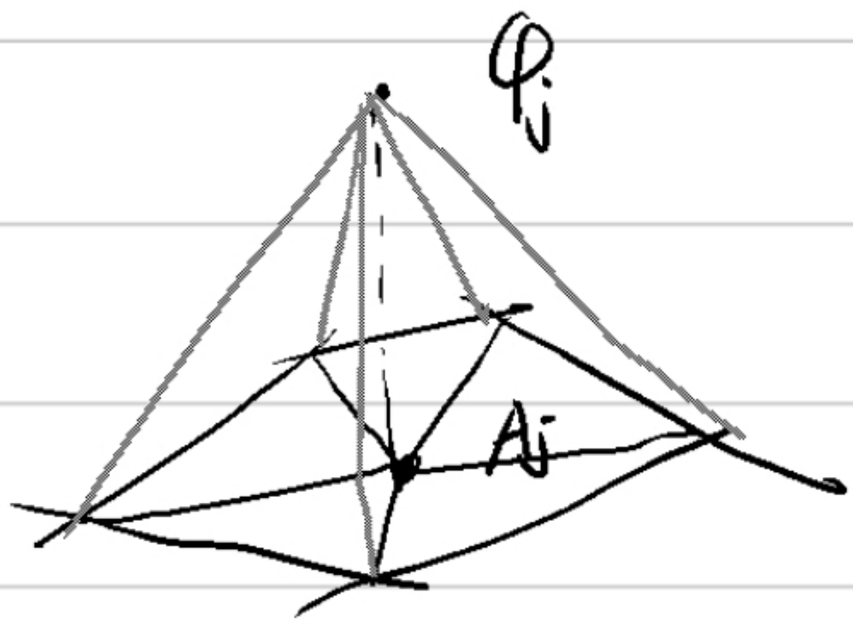
$$V_h(0) = \{ u\in V_h :\ u(A_i)=0,\ \forall A_i\in\partial\Omega\}$$

易知 V_h 是 $H^1(\Omega)$ 的子空间，$V_h(0)$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 子空间

其元素由 $\{u(A_i)\}_{i=1}^N$ 决定

构造基底函数 $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$

$\varphi_i(A_j) = \delta_{ij}$, $i,j=1,\cdots,N$



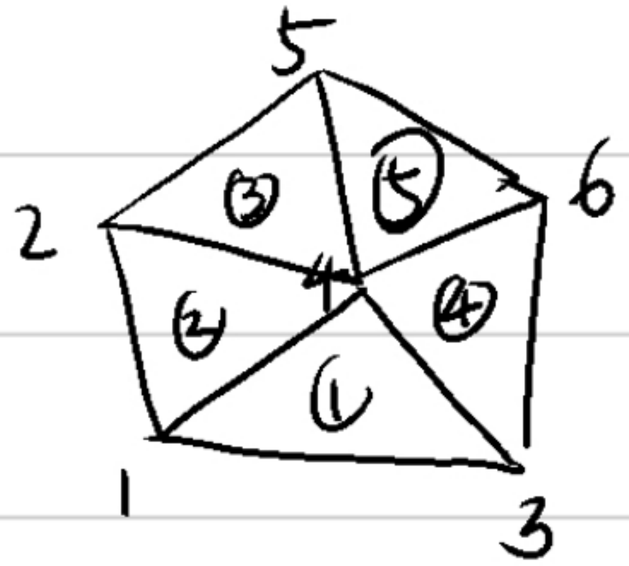
Step3 计算K与f

定义 $en(\alpha, e)$ $e \in \{1, \cdots, M\}$ 单元序

$\alpha \in \{1,2,3\}$ 局部节点序

$en(\alpha, e) \in \{1, \cdots, N\}$ 整体节点序

e.g.



$$en = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 6 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$k_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \sum_{e=1}^{M} a^e(\varphi_j, \varphi_i)$$

$$\triangleq \sum_{e=1}^{M} \int_{T_e} \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i \, dx \triangleq \sum_{e=1}^{M} k_{ij}^e$$

观察：只有 i, j 同属一个单元 T_e 时，$k_{ij}^e \neq 0$

K计算策略：(A) 按 i, j 扫描，大量 0 (X)

(B) 按单元扫描 (√)

令 $\lambda_\alpha^e = \varphi_{en(\alpha,e)}|_{T_e}$

$\{\lambda_\alpha^e\}_{\alpha=1}^3$ 为 $P_1(T_e)$ 的一组基

定义单元刚度矩阵

$$K^e(\alpha,\beta) = a^e(\lambda_\alpha^e, \lambda_\beta^e) = \int_{T_e} \nabla\lambda_\alpha^e \cdot \nabla\lambda_\beta^e \, dx$$

则有 $$k_{ij} = \sum_{e=1}^{M} k_{ij}^e = \sum_{\substack{en(\alpha,e)=i\in T_e \\ en(\beta,e)=j\in T_e}} K^e(\alpha,\beta)$$

同理 $$f_i = \int \varphi_i f\,dx = \sum_{e=1}^{M} \int_{T_e} \varphi_i f\,dx$$

$$= \sum_{en(\alpha,e)=i\in T_e} \int_{T_e} \lambda_\alpha^e f\,dx = \sum_{en(\alpha,e)=i\in T_e} f_\alpha^e$$

算法 6.1 令 $K=(k(i,j))=:0$, $f=(f(i))=:0$

for $e=1:M$ ($\alpha,\beta=1,2,3$)

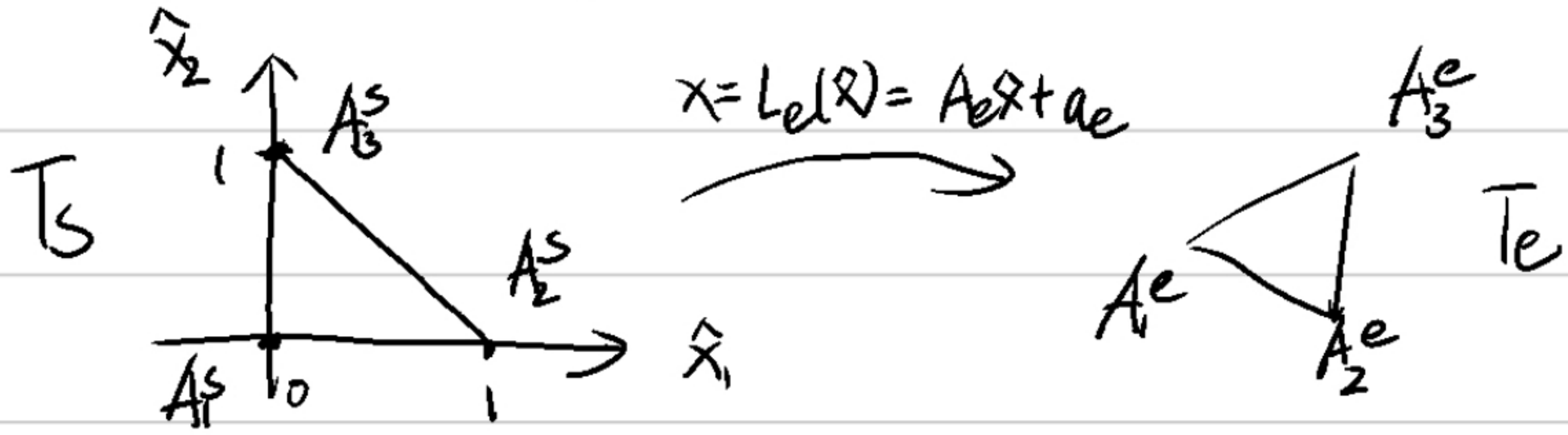
计算 $K^e=(K^e(\alpha,\beta))$; $f^e=(f^e(\alpha))$;

$K(en(\alpha,e),en(\beta,e)) = K(en(\alpha,e),en(\beta,e)) + K^e(\alpha,\beta)$;

$f(en(\alpha,e)) := f(en(\alpha,e)) + f^e(\alpha)$;

end.

Step 3* 计算 k^e, f^e



T_s: $\lambda_1^s = 1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2$, $\lambda_2^s = \hat{x}_1$ $\lambda_3^s = \hat{x}_2$

$$\lambda_\alpha^s(\hat{x}) = \lambda_\alpha^e(x) = \lambda_\alpha^e(L_e(\hat{x}))$$

L_e: $A_e = (A_2^e - A_1^e, A_3^e - A_1^e)$, $a_e = A_1^e$

则 $\hat{x} = L_e^{-1}(x) = A_e^{-1}x - A_e^{-1}A_1^e$

由 $\lambda_\alpha^e(x) = \lambda_\alpha^s(L_e^{-1}(x))$ 得

$$\nabla\lambda^e(x) = \nabla\lambda^s(\hat{x})\,A_e^{-1} \qquad \begin{pmatrix}\cdots\\ \cdots\\ \cdots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cdots\\ \cdots\\ \cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdots\\ \cdots\end{pmatrix}$$

3×3 3×2 2×3

$$k^e = \int_{T_e} \nabla\lambda^e(x)\,(\nabla\lambda^e(x))^T dx$$

$$= \int_{T_s} \nabla\lambda_e^s(\hat{x})\,A_e^{-1}\,(\nabla\lambda^s(\hat{x})\,A_e^{-1})^T \det(A_e)\,d\hat{x}$$

同理 $f^e = \int_{T_e} f(x)\,\lambda^e(x)\,dx$

$= \int_{T_S} f(L_e(\hat{x}))\,\lambda^s(\hat{x})\,\det A_e\,d\hat{x}$

Step 4. 求解 $Ku_h = f$ (有限元方程)

※ 其他变种

① 非齐次 Dirichlet B.C.

$u(x) = u_0(x), \quad \forall x \in \partial\Omega$

有限元试探函数空间

$V_h(u_0) = \{ u \in V_h : u(A_i) = u_0(A_i), \forall A_i \in \partial\Omega \}$

② 混合 B.C.

$$\begin{cases} u(x) = u_0(x) & \forall x \in \partial\Omega_0 \quad \text{强制} \\ \frac{\partial u}{\partial n} + bu = g & \forall x \in \partial\Omega_1 \quad \text{自然} \end{cases}$$

变分形式中出现 $\int_{\partial\Omega_1} buv\,dx$ $\int_{\partial\Omega_1} gv\,dx$

一般，有限元试探函数空间

$$V_h(u_0;\partial\Omega_0)=\{u\in V_h:\ u(A_i)=u_0(A_i),\ \forall A_i\in\partial\Omega_0\}.$$

有限元检验函数空间

$$V_h(0;\partial\Omega_0)=\{u\in V_h;\ u(A_i)=0,\ \forall A_i\in\partial\Omega_0\},$$

注：① u_h 只近似地满足第二，三类 B.C.

② 与差分方法比，第二，三类 B.C. 的处理简单很多。

有限元的一般定义

构造有限元空间.

① 对 Ω 作有限元剖分 $\mathcal{T}_h$: $\bar{\Omega} = \bigcup_{K\in\mathcal{T}_h} K$

(良性要求 (i) (ii) (iii) (iv))

② "有限元" K 上的函数空间

③ 有限元函数空间的基底

e.g. $p \in P_K$ $p = \sum \varphi_i(p)\, p_i$

$\varphi_i(p)$: 自由度, p_i: 基底

若 $v \in C^\infty$? 投影至 P_K, 只需定义 $\varphi_i(v)$

定义 6.1. (K, P_K, Σ_K) 称为一个有限元, 如果

(1) 单元 $K \subset \mathbb{R}^n$ 内部非空, 边界 Lipschitz 连续闭

(2) P_K 有限维函数空间, $\dim(P_K) = N$

(3) 自由度集 Σ_K: $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$, $\varphi_i : C^\infty(K) \to \mathbb{R}$ 线性无关

称为自由度

且决定了 P_K 上的基 $\{p_i\}_{i=1}^N$ s.t. $\varphi_i(p_j) = \delta_{ij}$.

~ 单元的选择

以下：只考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的三角形元

其他：$\mathbb{R}^2$ 中 平行四边形，---

$\mathbb{R}^3$ 中 四面体，平行六面体，---

~ P_k 的选择：分片多项式

取 $P_k = \mathbb{P}_k(k)$ 次数不超过 k 的多项式

可证明：(练习) $\dim(\mathbb{P}_k(k)) = C_{n+k}^{n}$

当 $n=2$ 时， $\dim(\mathbb{P}_k(k)) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$.

~ Σ_k 的选择

(A) 节点型： $\varphi_i^0 : p \mapsto p(a_i^0)$

以及 a_i^s 上的 s 阶偏导

若 φ_i 中只含 φ_i^0 型：Lagrange 元

若也包含偏导：Hermite 元

(B) 积分型: $\Pi_i^S : p \to \frac{1}{meas_s(K_i^S)} \int_{K_i^S} p(x)\,dx$

K_i^S: K 的点, 边, 面 等.

定义 6.2: 有限元 (K, P_K, Σ_K), $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 自由度集

$\{P_i\}_{i=1}^N$ 为其对偶基, 满足 $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$.

定义 P_K 插值算子

$\Pi_K : C^\infty(K) \to P_K$, $\Pi_K(v) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(v) P_i$, $\forall v \in C^\infty(K)$

$\Pi_K(v)$ 为 v 的 P_K 插值函数

对于区域 Ω 的有限元 $\{(K, P_K, \Sigma_K)\}_{K \in \mathcal{T}_h}$

考虑有限元函数空间 $V_h = \{v,\ v|_K \in P_K\}$

令 $\Sigma_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \Sigma_K$ 为 V_h 的自由度集

定义 6.4: V_h 插值算子

$\Pi_h : C^\infty(\Omega) \to V_h$, $\Pi_h(v)|_K = \Pi_K(v|_K)$, $\forall v \in C^\infty(\Omega)$

$\Pi_h(v)$ 为 v 的 V_h 插值函数.

$P_1(k)$ 与 重心坐标

$a_1 = (a_{11}, a_{21})$

考虑三角元 K



$a_2 = (a_{12}, a_{22})$　　$a_3 = (a_{13}, a_{23})$

K 是3个顶点的凸包

$$K = \left\{ x = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i a_i,\ 0 \le \lambda_i \le 1,\ i = 1,2,3,\ \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1 \right\}$$

令 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$

$\tilde{x} = (x_1, x_2, 1)^T$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

易知 $\det(A) = 2\,\Delta a_1 a_2 a_3$ 面积 $\neq 0$

且有　$A\lambda = \tilde{x}$，　$\lambda = A^{-1}\tilde{x}$

称 $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x))$ 为 x 的面积(重心)坐标。

易知　$\lambda_i(a_j) = \delta_{ij}$　　$i, j = 1,2,3$



即 $\lambda_1(x)$，$\lambda_2(x)$，$\lambda_3(x)$ 构成了 $P_1(k)$ 的一组对偶基。

☆ $P_k(k)$ 的构造

法一：主格点自由度

定义：$K_0^n = \{\frac{1}{n+1}, \sum_{i=1}^{n+1} a_i\}$

$$K_k^n = \{x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i,\ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1,\ \lambda_i = \{0, \frac{1}{k}, \cdots, 1\}$$

$$1 \le i \le n+1\},\quad k \ge 1$$

称 n 单纯形 $K^n \subset \mathbb{R}^n$ 的 k 阶主格点.

e.g. $n=2$ 时，三角形元

K_0^2 K_1^2 K_2^2 K_3^2

定理 6.1. 自由度集 $\Sigma_k^n = \{p(x) : x \in K_k^n\}$ 构成了 $P_k(K^n)$ 的一组对偶基.

称 Σ_k^n 为 K^n 的 k 阶主格点自由度集

其元素为 k 阶主格点自由度

分析：令 $\alpha_i = k\lambda_i \in \{0,1,\cdots,k\}$ $i=1\cdots n$

则多重指标集 $\{\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n), \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \le k\}$

与 K_k^n 一一对应

K_k^n 有 C_{n+k}^n 个点 $(=\dim P_k(K^n))$

需证明 若 $p \in IP_k(K^n)$ 且 $p(x)=0$，$\forall x \in K_k^n$

证明 略.

若 $\Sigma_k = \Sigma_k^n$，则有限元 (K, P_k, Σ_k) 为型(k) n单纯型

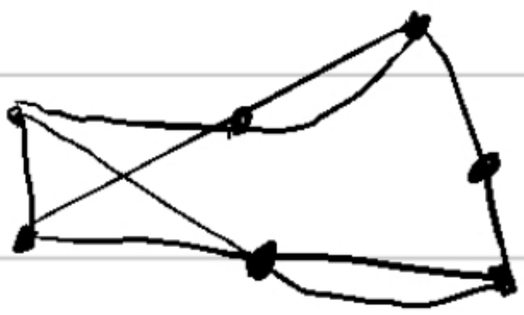
eg. $K_2^2 = \{a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{23}, a_{13}\}$

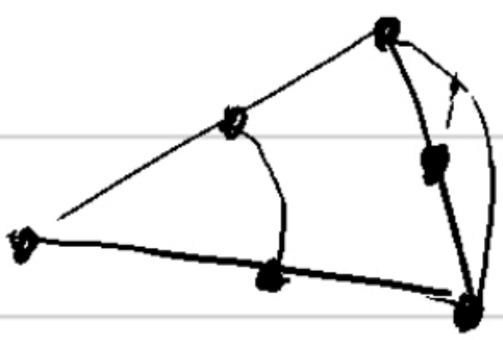
其中 $a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j)$

Σ_2^2 对应 $IP_2(K)$ 上的基

$\lambda_i(2\lambda_i(x)-1)$，$i=1,2,3$

$4\lambda_i(x)\lambda_j(x)$，$1 \le i < j \le 3$





更多例子：① $K \subset \mathbb{R}^2$ 是矩形

$$Q_k(k) = \{ P(x) : P(x) = \sum_{i,j \geq 0, i+j \leq k} p_{\alpha_1 \alpha_2} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \}$$

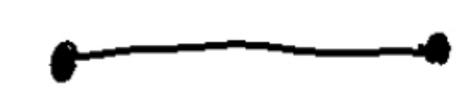
$$\dim(Q_k) = (k+1)^2$$

② $K \subset \mathbb{R}^3$ 四面体

可定义 $P_k(K)$ $\quad \dim(P_k) = C_{3+k}^{k}$

记号：
- • 函数值
- ∘ 一阶导
- ○ 二阶导
- / 法向导数
- ↗ 混合导数 eg $\frac{\partial v}{\partial x_1 \partial x_2}$

一维：



V_h 光滑度

$P_1(k)$ $\quad C^0$

$P_2(k)$ $\quad C^0$

$P_3(k)$ $\quad C^1$

二维：



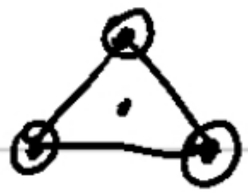
$\mathbb{P}_1(k)$ C^0



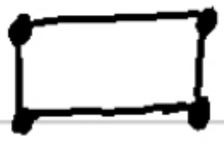
$\mathbb{P}_2(k)$ C^0



或



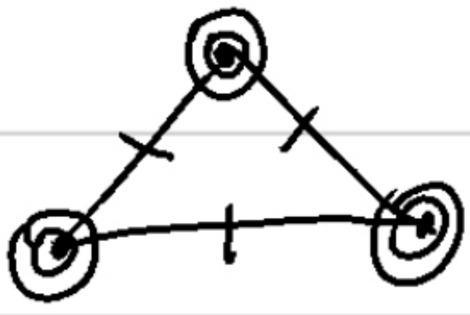
$\mathbb{P}_3(k)$ C^0



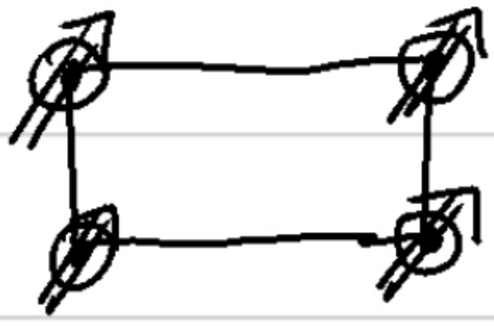
$\mathbb{Q}_1(k)$ C^0



$\mathbb{Q}_2(k)$ C^0



$\mathbb{P}_5(k)$ C^1

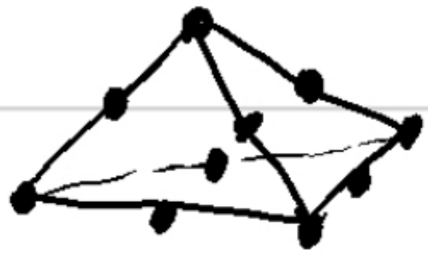


$\mathbb{Q}_3(k)$ C^1

三维：



$\mathbb{P}_1(k)$ C^0



$\mathbb{P}_2(k)$ C^0

阅读：有限元方解求解。