Ch7. 有限元误差估计

回到引例 (D) $-u''(x)=f(x),\ 0<x<1,\ u(0)=u(1)=0$

(V) Find u s.t. $(u,v)=(f,v)\quad \forall v\in V$

FEM: V_h 分片线性, $V_h\subset H^1$

$\forall u\in V_h,\ u(0)=u(1)=0,\ u=\sum_{i=1}^{M}\eta_i\varphi_i(x)$

(V_h) Find $u_h\in V_h$, st. $(u_h,v)=(f,v)$, $\forall v\in V_h$,

问: $u-u_h\to 0$? 什么 norm? $O(h^p)$?

由 (V), (V_h) 知 $((u-u_h),v)=0,\ \forall v\in V_h$

那么 $\forall v\in V_h$, 令 $w=u_h-v$, 则 $w\in V_h$

$$\begin{aligned}
\|(u-u_h)\|^2 &= \langle (u-u_h),(u-u_h)\rangle \\
&= \langle (u-u_h),(u-u_h)\rangle + \underbrace{\langle (u-u_h),w\rangle}_{=0} \\
&= \langle (u-u_h),(u-v)\rangle \\
&\le \|(u-u_h)\|\cdot\|(u-v)\|
\end{aligned}$$

则有 $\|(u-u_h)'\| \le \|(u-v)'\|$, $\forall v \in V_h$ --- ①

即"某意义"下, u_h 是最佳逼近. (但 $\|u\|$ 不是范数!)

令 Π_h 为 u 的线性插值函数 $\Pi_h(x_j) = u(x_j)$

则有 $\|(u(x) - \Pi_h(x))'\| \le h \max_{x\in[0,1]} |u''|$ —— ②

结合 ①② 可知 $|u(x) - u_h(x)| \le h \max_{x\in[0,1]} |u''|$ $\forall 0 \le x \le 1$

虽然这不是一个"丰满"的估计, 但有"启示性"

✱ Céa 引理与抽象误差估计

(V) Find $u \in V$, s.t. $a(u,v) = f(v)$, $\forall v \in V$ (7.1.1)

Céa 引理. V Hilbert 空间, V_h 线性子空间

$a(\cdot,\cdot)$, $f(\cdot)$ 满足 Lax-Milgram 引理条件

令 u 是 (7.1.1) 的解,

$u_h \in V_h$, 满足 $a(u_h, v) = f(v)$, $\forall v \in V_h$

则 $\exists C$ 与 V_h 无关 ($\|\cdot\|$ 为 V 中范数)

s.t. $\|u - u_h\| \le C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$

证明：$\forall w_h \in V_h$，$a(u, w_h) = f(w_h)$，$a(u_h, w_h) = f(w_h)$

则有 $a(u-u_h, w_h) = 0$

$\forall v_h \in V_h$，取 $w_h = u_h - v_h$，有 $w_h \in V_h$

且 $a(u-u_h, u_h-v_h) = 0$

由 $a(\cdot,\cdot)$ 的 V 椭圆性与有界性

$$\begin{aligned}
\alpha \|u-u_h\|^2 &\le a(u-u_h, u-u_h) \\
&= a(u-u_h, u-u_h) + \underbrace{a(u-u_h, u_h-v_h)}_{=0} \\
&= a(u-u_h, u-v_h) \\
&\le M \|u-u_h\| \|u-v_h\|
\end{aligned}$$

取 $C = \frac{M}{\alpha}$，则 $\|u-u_h\| \le C\|u-v_h\|$，$\forall v_h \in V_h$.

注：① 与引例比，$\|\cdot\|$ 是 V 中范数

但可能 $C > 1$ （次最优）

② 将误差估计转化成逼近问题

例（几何解读） (D) $-\Delta u + u = f$ in Ω, $u=0$ on $\partial\Omega$

(V) Find $u \in H_0^1(\Omega)$ $\left(a(u,v)=\int_\Omega(\nabla u\cdot\nabla v+uv)dx\right)$

s.t. $a(u,v) = f(v)$ $\forall\, v \in H_0^1(\Omega)$

特别地, $a(u,u) = \|u\|_{H^1}$

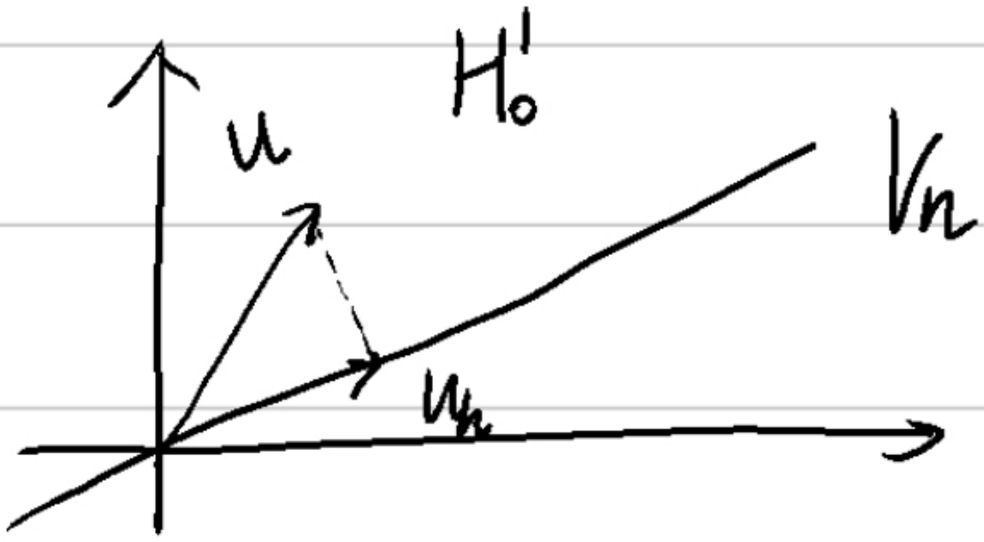
令 V_h 是 $H_0^1(\Omega)$ 的有限维线性子空间

(V_h) Find $u \in V_h$ s.t. $a(u_h,v)=f(v)$, $\forall v \in V_h$

可证 ① $a(u-u_h,v)=0$ $\forall v \in V_h$

② $\|u-u_h\|_{H^1} \le \|u-v\|_{H^1}$ $\forall v \in V_h$

即 Cea 引理中 $C=1$.



“此时”为最优逼近

注：一般只有次最优.

☆ 插值理论

由 Céa 引理 若 $\Pi_h u$ 是 u 在 V_h 上的插值

则 $\|u-u_h\| \le C \inf_{v\in V_h}\|u-v\| \le C\|u-\Pi_h u\|$

法一：Sobolev 插值理论（教材一）

法二：逐点估计 $\to H^k$ 估计（教材七） ✓

设 $\Omega\subset\mathbb{R}$，$\mathcal{T}_h=\{K\}$ 三角剖分

$V=H^1(\Omega)$ V_h：分片线性

对于 $K\in\mathcal{T}_h$，定义

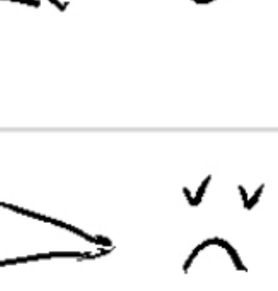
h_K = K 的最长边长（又称 K 的直径）

ρ_K = K 的内接圆直径

$h=\max\limits_{K\in\mathcal{T}_h} h_K$

我们考虑一族 $\{\mathcal{T}_h\}$ $h\to 0$





要求 $\exists$ 与 h 无关的 $\beta>0$

s.t. $\frac{\rho_K}{h_K}\ge\beta$ $\forall K\in\mathcal{T}_h$

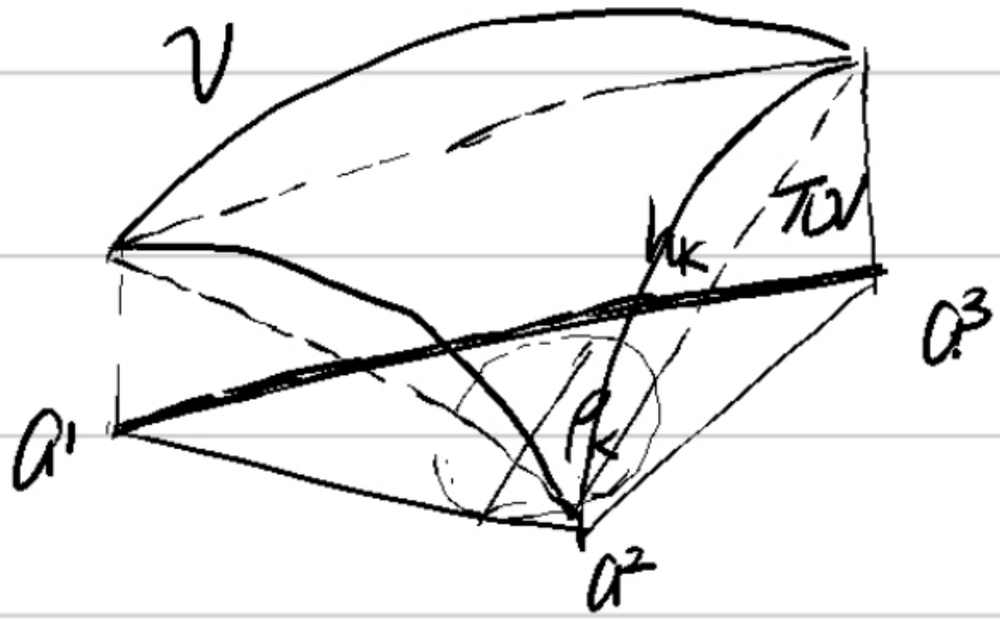


（不会出现任意小的内角）

令 A_i, $i=1,\cdots,N$ 为 $\mathcal{T}_h$ 的节点

对 $u\in C^0(\bar{\Omega})$, 定义 $\Pi_h u\in V_h$ 为插值函数

s.t. $\Pi_h u(A_i)=u(A_i)$, $i=1,\cdots,N$, $\Pi_h u$ 分片线性.



定理. 令 $k\in\mathcal{T}_h$, 顶点为 a^i, $i=1,2,3$

对 $v\in C^0(k)$, 令 $\Pi v\in P_1(k)$ s.t. $\Pi v(a^i)=v(a^i)$, $i=1,2,3$.

则 $$\max_{x\in k}|v-\Pi v|\le 2h_k^2\max_{|\alpha|=2,y\in k}|D^\alpha v|$$

$$\max_{|\alpha|=1,x\in k}|D^\alpha(v-\Pi v)|\le 6\frac{h_k^2}{\rho_k}\max_{|\alpha|=2,y\in k}|D^\alpha v|$$

证明: 令 $\lambda_i(x)$ 为基底函数

则 $$\Pi v(x)=\sum_{i=1}^{3}v(a^i)\lambda_i(x)\qquad x\in k$$

由 Taylor 展开 $v(a^i)=v(x)+P_i(x)+R_i(x)$

这里: $P_i(x) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)(a_j^i - x_j)$, $a^i = (a_1^i, a_2^i)$

$R_i(x) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_k}(\xi)(a_j^i - x_j)(a_k^i - x_k)$

其中 ξ 在 a^i, x 的连线

显然 $R_i(x) \le 2h_k^2 \max_{|\alpha|=2, y \in k} |D^\alpha v(y)|$

于是,我们有如下表示

$$Tv(x) = v(x) \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(x) + \sum_{i=1}^{3} P_i(x)\lambda_i(x) + \sum_{i=1}^{3} R_i(x)\lambda_i(x)$$

可证明如下 Lemma: 对 $j=1,2$, $x \in K$

练习
$$\begin{cases} ① & \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(x) = 1 \\ ② & \sum_{i=1}^{3} P_i(x)\lambda_i(x) = 0 \\ ③ & \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\lambda_i(x) = 0 \\ ④ & \sum_{i=1}^{3} P_i(x) \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \end{cases}$$

由①④知 $Tv(x) = v(x) + \sum_{i=1}^{3} R_i(x)\lambda_i(x)$

则有 $|v(x) - Tv(x)| \le \sum_{i=1}^{3} |R_i(x)| \lambda_i(x)$

$$\le \max_i |R_i(x)| \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(x)$$

$$\le 2h_k^2 \max_{|\alpha|=2, y \in k} |D^\alpha v|.$$

下面考虑 $\frac{\partial \Pi v}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{3} v(a^i) \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1}(x)$

$$= v(x) \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1}(x) + \sum_{i=1}^{3} P_i(x) \frac{\partial \lambda_i(x)}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{3} R_i(x) \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1}(x)$$

由③④ $$= \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) + \sum_{i=1}^{3} R_i(x) \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1}(x)$$

可证明 $\max_{x \in k} \left| \frac{\partial \lambda_i(x)}{\partial x_1} \right| \le \frac{1}{\rho_k}$

则有 $\left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial \Pi v}{\partial x_1}(x) \right| \le 6 \frac{h_k}{\rho_k} \max_{|\alpha|=2, y \in k} |D^\alpha v|, \quad \forall x \in k.$ 口.

注：同理可证 ($|v|_{H^r} = \left(\sum_{|\alpha|=r} \int_\Omega |D^\alpha v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ 半范数)

$$\| v - \Pi_k v \|_{L^2(k)} \le C h_k^2 |v|_{H^2(k)} \qquad |v - \Pi_k v|_{H^1(k)} \le C \frac{h_k^2}{\rho_k} |v|_{H^2(k)}$$

从单元 K 到全集 Ω

$$\| u - \Pi_h u \|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \| u - \Pi_h u \|^2_{L^2(k)}$$

$$\le \sum_{K \in \mathcal{T}_h} C^2 h_k^2 |u|^2_{H^2(k)}$$

$$\le C^2 h^4 |u|^2_{H^2(\Omega)}$$

则有 $\| u - \Pi_h u \|_{L^2(\Omega)} \le C h^2 |u|_{H^2(\Omega)}$

同理可证

$$|u - \Pi_h u|_{H^1(\Omega)} \le \tilde{C} h |u|_{H^2(\Omega)},$$

可推广：若 $\Pi_h u$ 是分片 r 阶多项式，则

$$\|u-\Pi_h u\|_{L^2(\Omega)} \le C h^{r+1} |u|_{H^{r+1}(\Omega)}$$

$$|u-\Pi_h u|_{H^1(\Omega)} \le C h^{r} |u|_{H^{r+1}(\Omega)}$$

若还有 $V_h \subset H^2(\Omega)$，则

$$|u-\Pi_h|_{H^2(\Omega)} \le C h^{r+1} |u|_{H^{r+1}(\Omega)}$$

注：若 u 光滑性不足，插值精度也下降。

✡ 误差估计（H^1）　由 Cea 引理

$$\|u-u_h\| \le C \inf_{v\in V_h} \|u-v\| \le C\|u-\Pi_h u\|$$

若 $V = H_0^1(\Omega)$，$V_h = \{v\in V,\ v|_k \in P_r(k),\ \forall k\in \mathcal{T}_h\}$

则有 $\|u-u_h\|_{H^1} \le C h^r |u|_{H^{r+1}(\Omega)}$

特别地 $r=1$ 时

$$\|u-u_h\|_{H^1} \le C h |u|_{H^2}$$

☆ 误差估计 (L^2)

H^1 误差估计知 $\|u-u_h\|_{L^2} \le Ch|u|_{H^2}$

但 L^2 插值理论知 $\|u-\Pi_h u\|_{L^2} \le Ch^2|u|_{H^2}$

问：是否有 $\|u-u_h\|_{L^2} = O(h^2)$ ？

Aubin-Nische 技巧，duality argument

模型问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

考虑对偶问题

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = e := u-u_h & \text{in } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

当 Ω 凸多边形，或边界光滑时

$$\|\varphi\|_{H^2} \le C\|e\|_{L^2} \quad (\text{正则性})$$

回忆 $a(e, v_h)=0$, $\forall v_h \in V_h$

这里 $e=u-u_h$, $a(u,v)=\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$

则 由 $\pi_h\varphi \in V_h$, $a(e, \pi_h\varphi)=0$ --- (*)

于是 $(e,e)=(e,-\Delta\varphi)$

$= a(e,\varphi)$ Green公式

$= a(e, \varphi-\pi_h\varphi)$ 由(*)

则 $\|e\|_{L^2} \le \|e\|_{H^1} \|\varphi-\pi_h\varphi\|_{H^1}$ C-S

$\le \|e\|_{H^1} C h |\varphi|_{H^2}$ 插值

$\le \|e\|_{H^1} C h \|\varphi\|_{H^2}$

$\le Ch \|e\|_{H^1} \|e\|_{L^2}$ 正则性

即有 $\|e\|_{L^2} \le Ch \|e\|_{H^1}$

由 H^1 误差估计 $\|e\|_{H^1} \le C_1 h |u|_{H^2}$

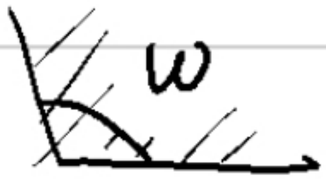
则有 $\|e\|_{L^2} \le C_2 h^2 |u|_{H^2}$.

☆ 正则性与后验误差(简介)

考虑 $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$

若 $\partial\Omega$ 光滑，有 $\|u\|_{H^{s+2}} \le C\|f\|_{H^s}$

当 $\partial\Omega$ 不光滑时，上式可能不成立





靠近夹角为 w 的角落时，

解 $u(r,\theta) \sim r^\gamma \alpha(\theta) + \beta(r,\theta)$，$\gamma = \frac{\pi}{w}$

这里 α, β 光滑，但 r^γ 不光滑

eg. $w > \pi$ 时 $u \notin H^2$.

即使 $u \in H^2$，$|u|_{H^2}$ 不一定均匀分布

利用真解 u 得误差估计：先验误差估计

利用数值解 u_h ---- ：后验 ----

自适应方法

初始网格（粗）

↓

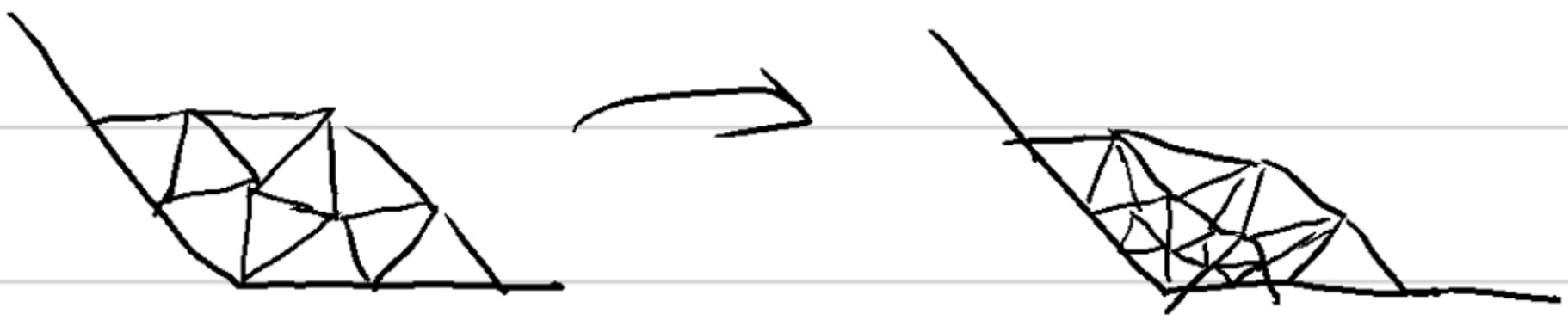
有限元解 ← 调整网格，有限元空解

↓

后验误差估计 精度不足

↓ 精度足够

完成



☆ 混合有限元

Stokes 问题 $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ $t > 0$

速度 $u = (u_1, u_2)^T$ 压强 p

载荷 $f = (f_1, f_2)^T$

$$(D) \begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

用条件 $\int_\Omega p \, dx = 0$ 可唯一确定 p.

变分形式 ①

$$V = \{ v \in [H_0^1(\Omega)]^2, \quad \nabla \cdot v = 0 \text{ in } \Omega \}$$

Find $u \in V$ s.t. $a(u, v) = L(v)$ $\forall v \in V$.

这里 $a(u, v) = \sum_i \int_\Omega \nabla v_i \cdot \nabla u_i \, dx$

$L(v) = \sum_i \int_\Omega f_i v_i \, dx$

此时 p "消失", 不可缩条件 $\nabla \cdot u$ 被强制

FEM 不易设计

变化形式②

令 $V=[H_0^1(\Omega)]^2$ $H=\{q\in L^2(\Omega),\int_\Omega q\,dx=0\}$

Find $(u,p)\in V\times H$ s.t.

$$(\nabla u,\nabla v)-(p,\nabla\cdot v)=(f,v) \quad \forall v\in V$$

$$(q,\nabla\cdot u)=0 \quad \forall q\in H$$

Galerkin 方法 V_h, H_h

Find $(u_h,p_h)\in V_h\times H_h$ s.t.

$$(\nabla u_h,\nabla v)-(p_h,\nabla\cdot v)=(f,v),\ \forall v\in V_h$$

$$(q,\nabla\cdot u_h)=0 \quad \forall q\in H_h$$

混合有限元法

e.g. 方形区域、方形元 $K\in\mathcal{T}_h$

可取 $V_h=\{v\in V,\ v|_K=[Q_2(K)]^2,\ \forall K\in\mathcal{T}_h\}$

$H_h=\{q\in H,\ q|_K\in Q_0(K),\ \forall K\in\mathcal{T}_h\}$

更多？《有限元II》