偏微方程数值解　期末考试

考试时间: 12月28日.　时间: 08:30 am to 10:30 am.（120 minutes）

答题时请注意：

- 计算题需要有完整的解题步骤，证明题需要严密的论证过程。
- 没有出现在答题纸上的要点，视为答题人不知道或者没有能力阐述清楚。
- 答题纸上不需要抄题目。但是请标好答题序号。
- 请大家严格遵守考试纪律。祝大家考试顺利!

1、椭圆方程的有限差分 (10+10分)

考虑矩形区域 $\Omega = (0,1)\times(0,1)$ 上的 Poisson 方程,

$$-\Delta u + u = f, \quad (x,y) \in \Omega.$$

和边值条件

$$u = 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega.$$

（1）建立此问题的五点差分格式，并做局部截断误差分析。

（2）陈述并证明该数值格式的 L^∞ 意义下的稳定性，并用稳定性证明格式的收敛性。

2、双曲方程的有限差分 (15+10分)

考虑一阶波方程

$$u_t + a u_x = 0, \quad x \in I \subset \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

（1）当 $a > 0$ 是常数时，用**两种方式**推导Beam-Warming格式，并做 L^2 稳定性分析。

（2）当 $a(x) > 0$ 是一个 Lipschitz 连续函数时，构造一个一阶格式，并做 L^2 稳定性分析。

3、变分形式和有限元方法（10+15+15分）

考虑下面的椭圆型问题

$$\begin{aligned} -\nabla\cdot(a(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) &= f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Omega\subset R^2,\\ u(\mathbf{x}) &= u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Gamma_1,\\ \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_1} + u(\mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x}\in\Gamma_2,\\ \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_2} &= 0, \quad \mathbf{x}\in\Gamma_3, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x_1,x_2) : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\},\\ \Gamma_1 &= \{(x_1,x_2) : x_1 = 0, 0 \le x_2 \le 1\},\\ \Gamma_2 &= \{(x_1,x_2) : x_1 = 1, 0 \le x_2 \le 1\},\\ \Gamma_3 &= \{(x_1,x_2) : 0 < x_1 < 1, x_2 = 0, 1\}. \end{aligned}$$

另外，我们假设 $a:\Omega\to\mathbb{R}, f:\Omega\to\mathbb{R}$ 满足

$$0<A\le a(\mathbf{x})\le B, \text{ in } \Omega, \quad f\in L^2(\Omega),$$

而且 $u_0|_{\Gamma_1}$ 是函数 $u_0\in H^1(\Omega)$ 的迹.

（1）写出该问题的变分形式并定义弱解。

（2）此问题的弱解什么时候也是问题的古典解？给出条件并证明。

（3）假设变分形式中的双线性形式具有“适当意义”下的强制性，证明该问题的弱解唯一。

4、混合型方程的有限差分（有限体积格式） (15分)

Poisson-Nernst-Planck(PNP) 系统是描述离子传输的基本模型，它由 m 个守恒律和一个 Poisson 方程组成

$$\partial_t\rho_i+\nabla\cdot J_i=\partial_t\rho_i+\nabla\cdot\left(-\nabla\rho_i-\rho_i\left(z_i\nabla\phi+\nabla\mu_i(x)\right)\right)=0, \quad x\in\Omega\subset\mathbb{R}^d, \quad t>0, \quad i=1\cdots m.$$

$$-\Delta\phi=f(x)+\sum_{i=1}^{m}z_i\rho_i, \quad x\in\Omega, \quad t>0.$$

其中, $i=1,\cdots,m,\rho_i=\rho_i(x,t)$ 表示第 i 种离子的密度。在通量 J_i 中, 参数 z_i 为化合价, ϕ 为静电势, $\mu_i(x)$ 表示给定的势能函数。在 Poisson 方程中, $f(x)$ 为系统中已知的固定电荷密度。我们限定如下的初边值条件：对 $i=1,\cdots m$

$$\rho_i(x,0)=\rho_i^{in}(x)\ge 0, \quad x\in\Omega; \quad J_i=0, \quad x\in\partial\Omega; \quad \phi(x,t)=\phi^b, \quad x\in\partial\Omega$$

为了引入合理的数值离散，将密度方程重新表述为

$$\partial_t\rho_i=\nabla\cdot\left(e^{-\psi_i}\nabla\left(\rho_i e^{\psi_i}\right)\right), \quad \psi_i(x,t)=z_i\phi(x,t)+\mu_i.$$

考虑 1 维情形, 区域 $\Omega=[0,L]$, 给定正整数 N, 网格大小 $h=\frac{L}{N}$, 空间单元 $K_j=\left[x_{j-1/2},x_{j+1/2}\right]=\left[(j-1)h,jh\right]$, 满足 $\cup_{j=1}^{N}K_j=\Omega$ 。单元的中心为 $x_j=(j-\frac{1}{2})h, j=1,\cdots,N$. 考虑半离散有限体积格式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_{i,j}(t)=\frac{C_{i,j+1/2}(t)-C_{i,j-1/2}(t)}{h},$$

$$-\frac{\Phi_{j+1/2}(t)-\Phi_{j-1/2}(t)}{h}=f_j+\sum_{i=1}^{m}z_i\rho_{i,j}(t),$$

其中, 当 $1<j<N$ 时,

$$C_{i,j+1/2}(t)=\frac{e^{-\psi_{i,j+1/2}(t)}}{h}\left(\rho_{i,j+1}(t)e^{\psi_{i,j+1}(t)}-\rho_{i,j}(t)e^{\psi_{i,j}(t)}\right), \quad \psi_{i,j}(t)=z_i\phi_j(t)+\mu_{i,j},$$

$$e^{-\psi_{i,j+1/2}(t)}=\frac{1}{2}\left(e^{-\psi_{i,j}(t)}+e^{-\psi_{i,j+1}(t)}\right), \quad \Phi_{j+1/2}(t)=\frac{\phi_{j+1}(t)-\phi_j(t)}{h},$$

对边界单元, 有

$$C_{i,1/2}(t)=C_{i,N+1/2}(t)=0, \quad \Phi_{1/2}(t)=\frac{2\left(\phi_1(t)-\phi^b\right)}{h}, \quad \Phi_{N+1/2}(t)=\frac{2\left(\phi^b-\phi_N(t)\right)}{h}.$$

定义能量函数

$$E_h(t):=\sum_{j=1}^{N}h\left[\sum_{i=1}^{m}\rho_{i,j}(t)\left(\log\rho_{i,j}(t)-1\right)+\frac{1}{2}\left(f_j+\sum_{i=1}^{m}z_i\rho_{i,j}(t)\right)\phi_j(t)+\sum_{i=1}^{m}\rho_{i,j}(t)\mu_{i,j}\right].$$

证明这个半离散的数值格式是能量稳定的，即 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_h(t)\le 0$。