PDE数值解第一次大作业上机报告

伍思亦 2000010861

1.1 问题描述

考虑单位圆盘 $B = (x, y) : x^2 + y^2 < 1$ 上的 Poisson 方程

$$-\Delta u = 1, \quad (x, y) \in B$$

和边值条件

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial B$$

(1) 将方程写成极坐标的形式，额外补充圆心处的有界性条件

$$\lim_{r \to 0+} u_r = 0$$

注意到解其实是关于半径 r 的一元函数。对这个一维问题适当的设计有限差分格式，包括对方程的离散和对边界条件的处理。（在 $r = 0$ 附近使用半整点技巧）

(2) 求解这个Poisson方程得到真解（这其实是一个一维的常微分方程) 。取格点数 $N_r = 8, 16$ 时，计算数值解，将真解和数值解画在一个图里作比较。

1.2 数值方法

设 $u(x, y) = v(r)$，则 v 满足常微分方程边值问题

$$\begin{cases} -(\dfrac{1}{r} v'(r) + v''(r)) = 1, \quad 0 < r < 1, \\ v'(0) = v(1) = 0 \end{cases}$$

可得真解为

$$v(r) = \frac{1 - r^2}{4}$$

取步长 $h = (N_r - 1/2)^{-1}$，网格点 $r_j = (j - 1/2)h,\ j = 0, \ldots, N_r$。对方程用一阶中心差商 $\dfrac{\Delta_{0r}}{2h}$ 近似 ∂_r，二阶中心差商 $\dfrac{\delta_r^2}{h^2}$ 近似 ∂_r^2 得到有限差分格式

$$\begin{cases} -L_h V_j = -\left(\dfrac{V_{j+1} - V_{j-1}}{2hr_j} + \dfrac{V_{j+1} - 2V_j + V_{j-1}}{h^2} \right) = 1, \quad j = 1, \cdots, N_r - 1, \\ \dfrac{V_1 - V_0}{h} = V_{N_r} = 0 \end{cases}$$

下面分析该格式的收敛性。取 $J_\Omega = \{0, \ldots, N_r - 1\}$，$J_D = \{N_r\}$。在 J_Ω 上，差分算子 L_h 可表示为

$$L_h V_j = \begin{cases} -\dfrac{2}{h^2} V_j + \left(\dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{2hr_j} \right) V_{j+1} + \left(\dfrac{1}{h^2} - \dfrac{1}{2hr_j} \right) V_{j-1} h, & 1 \le j < N_r, \\ \dfrac{V_1 - V_0}{h}, & j = 0. \end{cases}$$

容易看出L_h满足最大值原理。设问题的真解 v 充分光滑，通过 Taylor 展开容易验证存在与h无关的常数K_1, K_2使得局部截断误差满足

$$\max_{1\le j<N_r} |T_j| \le K_1 h^2, \quad |T_0| \le K_2 h$$

取如下的比较函数

$$\Phi_j = \begin{cases} \dfrac{K_1 r_j^2}{4}, & j = 0, \\ \dfrac{K_1 r_j^2}{4} + K_2, & 1 \le j \le N_r. \end{cases}$$

有

$$\begin{cases} \Phi_{N_r} = \dfrac{K_1}{4} + K_2, \\ L_h \Phi_j = K_1, & 1 \le j \le N_r, \\ L_h \Phi_j = K_2/h, & j = 0. \end{cases}$$

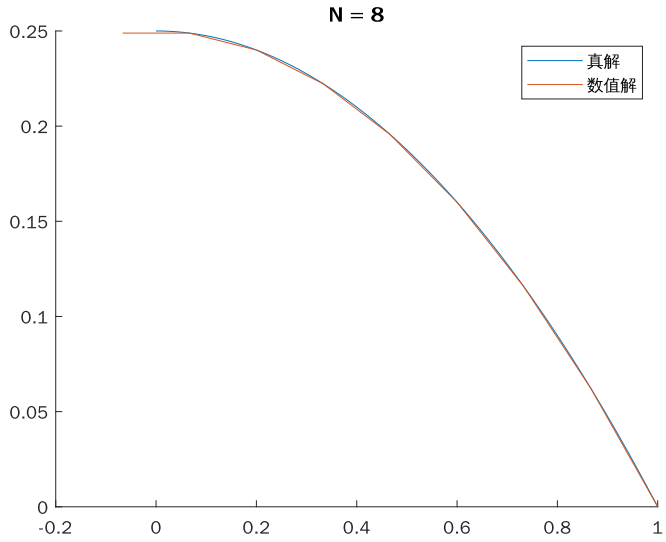
由比较定理即得对整体误差的估计

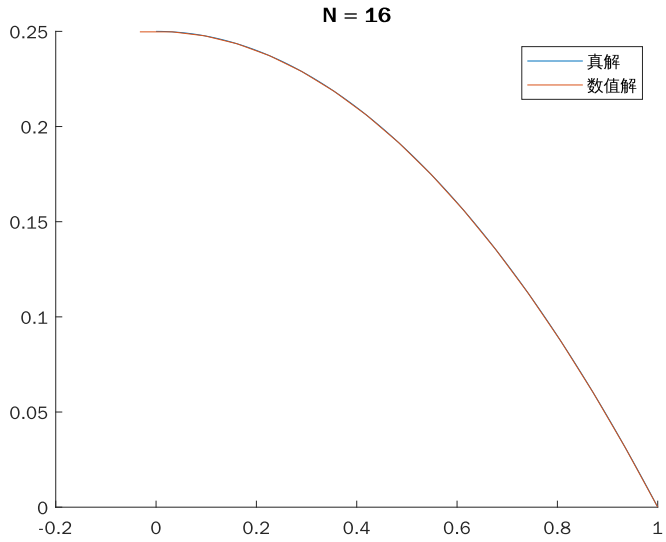
$$\max_{0\le j<N_r} |e_j| \le |e_{N_r}| + \left(\frac{K_1}{4} + K_2 \right) h^2$$

所以方法具有二阶收敛性。

1.3 结果与分析

$N_r = 8, 16$ 时数值解和真解的图像如下：





观察发现数值解和真解在网格点上的值几乎一致，这是因为此问题的真解$v(r)=(1-r^2)/4$恰好可使截断误差为0。

2.1 问题描述

考虑扩散方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x\in(0,1), t>0, \\ u(x,0)=\dfrac{x^2}{2}, & x\in[0,1], \\ u(0,t)=0, u_x(1,t)=1, & t>0. \end{cases}$$

(1) 固定网格比 $\mu=0.25$，取 $\Delta x=1/4,1/8,1/16,1/32$, 用显格式求解该问题至 $T=1$，并用外推法做后验误差估计，在 L^2 和 L^∞ 的意义下，分别得到收敛阶。

(2) 用Crank-Nicolson格式求解该问题，使用足够细的网格计算至 $T=1,2,3,4$，画出这四个时刻的数值解的图像。将初值换成 $u(x,0)=x^2-x$，重复上述实验，你有什么观察?

2.2 数值方法

令 $N=1/\Delta x$，网格比$\mu=\Delta t/\Delta x^2$，$x_j=j\Delta x$，$t_m=m\Delta t$，则直线族$x=x_j, j=0,\dots,N+1$与$t=t_m$给出了$[0,1+\Delta x]\times\mathbb{R}_+$上的均匀网格。用影子单元处理 $x=1$ 处的边界条件，得到如下显格式（$\mu\le\frac{1}{2}$时L^2和L^∞稳定）：

$$\begin{cases} \dfrac{U_j^{m+1}-U_j^m}{\tau}=\dfrac{U_{j+1}^m-2U_j^m+U_{j-1}^m}{h^2}, & m\ge1, 1\le j\le N \\ U_0^m=0, \dfrac{U_{N+1}^m-U_{N-1}^m}{h}=1, & m\ge1 \end{cases}$$

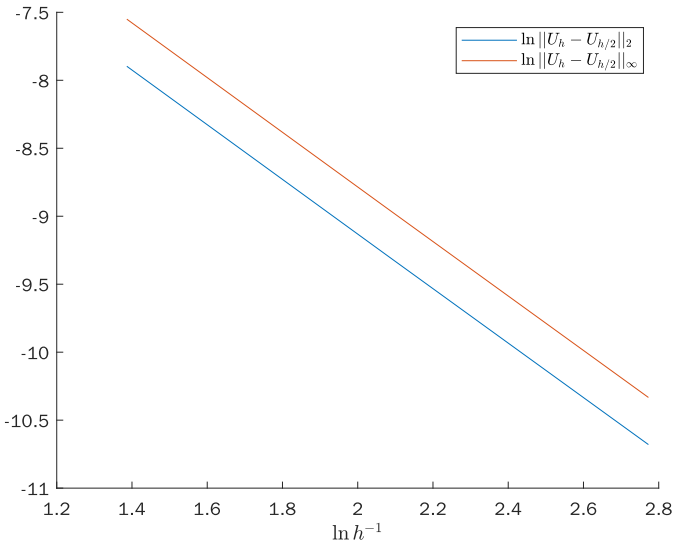
以及 Crank-Nicolson 格式（无条件L^2稳定，$\mu\le1$时L^∞稳定）：

$$\begin{cases} \dfrac{U_j^{m+1}-U_j^m}{\tau}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{U_{j+1}^m-2U_j^m+U_{j-1}^m}{h^2}+\dfrac{U_{j+1}^{m+1}-2U_j^{m+1}+U_{j-1}^{m+1}}{h^2}\right), & m\ge1, 1\le j\le N, \\ U_0^m=0, \dfrac{U_{N+1}^m-U_{N-1}^m}{h}=1, & m\ge1. \end{cases}$$

对$h=1/4,1/8,1/16$，作出 $\ln||U_h-U_{h/2}||_\infty$ 与 $\ln||U_h-U_{h/2}||_2$ 关于 $\ln h^{-1}$ 的图像，由图像的斜率即可得到收敛阶的估计。

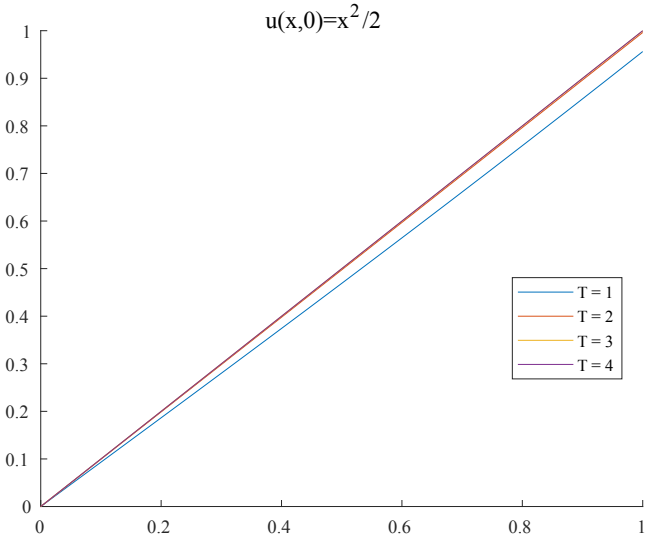
2.3 结果与分析

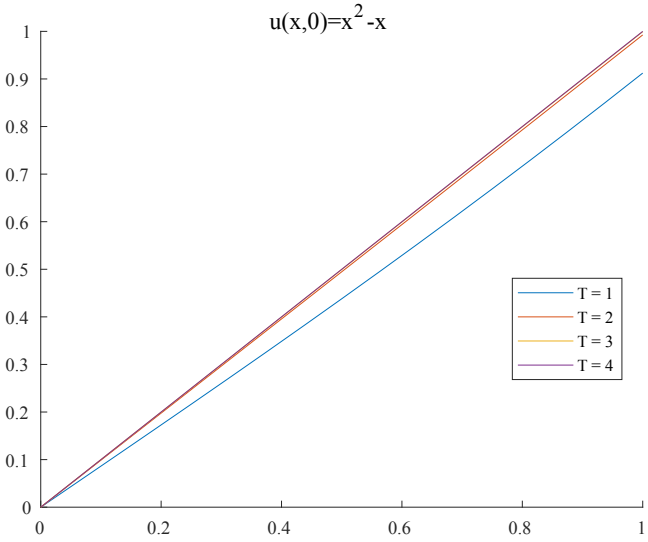
(1) 由显格式数值解作出 $\ln ||U_h - U_{h/2}||_\infty$ 与 $\ln ||U_h - U_{h/2}||_2$ 关于 $\ln h^{-1}$ 的图像如下：



观察发现图像接近直线段，每段的斜率都在-2到-2.02之间。这表明固定网格比时显式方法关于空间步长在L^2和L^∞意义下都是二阶收敛，这与理论分析的结果是一致的。

(2) 取 $\Delta x = \dfrac{1}{16}$，$\Delta t = \dfrac{1}{512}$得到数值解如下：





观察发现随着 T 增大，数值解都趋近于 $f(x)=x$。事实上，可以求出两种初值条件下问题的解析解为

$$u_i(x,t)=x-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_i}{(2k-1)^3\pi^3}e^{-\frac{1}{4}\pi^2(2k-1)^2t}\sin\left((k-\frac{1}{2})\pi x\right)$$

其中$C_1=16,C_2=32$。容易验证对$i=1,2$均有$\lim_{t\to\infty}u_i(x,t)=x$。可见数值解很好地保留了解析解在$T\to\infty$时的极限行为。

3.1 问题描述

考虑一阶波方程的初边值问题

$$\begin{cases}u_t+u_x=0, & x\in(-1,5),t>0,\\ u(x,0)=e^{-5(x-1)^2}, & x\in[-1,5],\\ u(-1,t)=0, & t>0.\end{cases}$$

(1) 用 upwind 方法求解该问题。固定网格比 $\nu=0.5$，取 $\Delta x=1/4,1/8,1/16,1/32$，分别求解至 $T=1$，并用外推法做后验误差估计，在 L^2 和 L^∞ 的意义下，分别得到收敛阶。

(2) 用 upwind 方法求解该问题。固定 $\Delta x=1/32$，取网格比 $\nu=0.5,1,2$，分别求解至$T=1$，画出数值解的图像，你有什么观察?

(3) 用 Lax-Wendroff 格式求解该问题，使用足够细的网格计算至 $T=0.5,1,1.5,2$，画出这四个时刻的数值解的图像。你在振幅、相位、最值等角度有什么观察?

3.2 数值方法

令 $N=6/\Delta x$，$x_j=-1+j\Delta x$，$t_m=m\Delta t$，则直线族$x=x_j,j=0,\dots,N$与$t=t_m$给出了$[-1,5]\times\mathbb{R}_+$上的均匀网格。其上的 upwind 格式为

$$\begin{cases}\dfrac{U_j^{m+1}-U_j^m}{\tau}=\dfrac{U_j^m-U_{j-1}^m}{h}, & m\geq1,1\leq j\leq N,\\ U_0^m=0, & m\geq1.\end{cases}$$

Lax-Wendroff 格式为

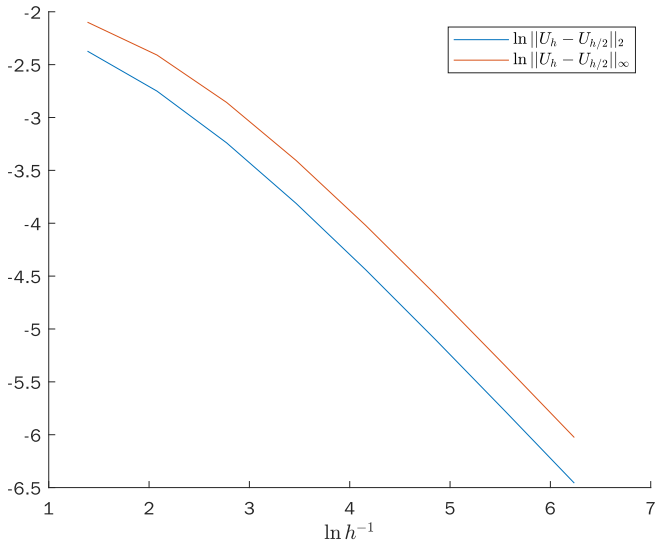
$$\begin{cases} U_j^{m+1} = -\frac{1}{2}\nu(1-\nu)U_{j+1}^m + (1-\nu^2)U_j^m + \frac{1}{2}\nu(1+\nu)U_{j-1}^m, & m \geq 1, 1 \leq j \leq N, \\ U_0^m = 0, & m \geq 1. \end{cases}$$

其中 $\nu = \tau/h$ 为网格比。

用外推法估计收敛阶的做法同第2题。

3.3 结果与分析

(1) 由 upwind 格式数值解作出 $\ln ||U_h - U_{h/2}||_2$ 与 $\ln ||U_h - U_{h/2}||_\infty$ 关于 $\ln h^{-1}$ 的图像如下（为尽量准确地估计收敛阶，实际计算的步长$h = 1/4, 1/8, \ldots, 1/1024$）：

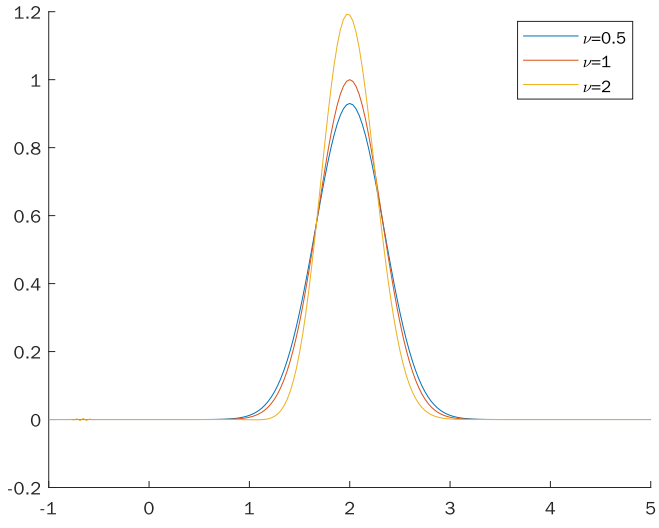


各段的斜率如下表：

$\log_2 h^{-1}$	2	3	4	5	6	7	8
L^2	-0.5454	-0.7052	-0.8267	-0.9049	-0.9499	-0.9743	-0.9870
L^∞	-0.4483	-0.6459	-0.7923	-0.8860	-0.9400	-0.9692	-0.9844

观察发现图像的斜率随着 $\ln h^{-1}$ 增大而减小并趋于 -1，所以固定网格比时 upwind 方法关于空间步长在L^2与L^∞意义下均为一阶收敛，这与理论分析的结果是一致的。

(2) 对不同网格比得到的数值解的图像如下：

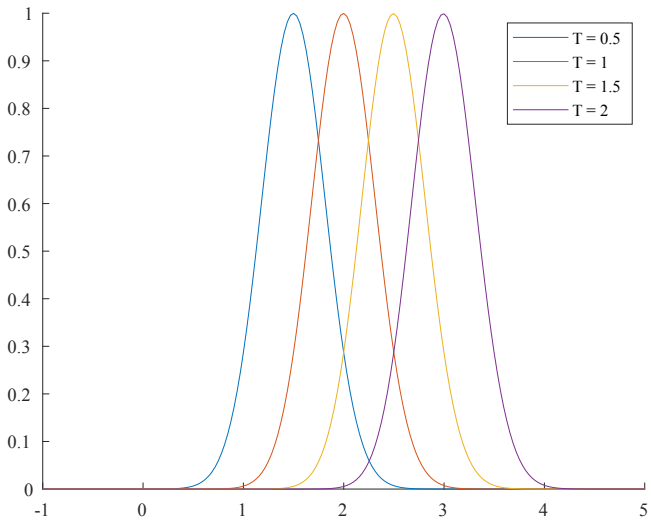


观察发现三个解在$x=2$处达到不同的最大值，选取网格比 $\nu=1$ 时得到的数值解最接近真解。原因是$\nu>1$时格式不满足 CFL 条件，不具有稳定性，如果再增大 T 的值或者减小步长 h，数值解将会出现剧烈的震荡；$\nu\leq 1$时，将离散 Fourier 波形 $U_j^m=(\lambda_k)^m e^{ijkh}$ 代入差分方程可得增长因子为

$$\lambda_k=(1-\nu)+\nu e^{-ikh}$$

可得 $|\lambda_k|^2=1-4\nu(1-\nu)\sin^2\dfrac{kh}{2}$，于是当$\nu=1$时，$|\lambda_k|=1$，波形无衰减；当$\nu=0.5$时，对$0<kh\leq\pi$有$|\lambda_k|=\cos\dfrac{kh}{2}$，波形的高频部分迅速衰减，使得数值解有比较大的振幅误差，而低频波形的相位误差相对较小，因此色散现象并不明显。

(3) 取空间步长 $\Delta x=1/32$，网格比 $\nu=1/2$，数值解在 $T=0.5,1,1.5,2$ 四个时刻的图像如下：



设数值解 U 在 x_j 处取到最大值 U_{max}，x_j 和 U_{max} 与 T 的关系如下表：

T	0.5	1	1.5	2
U_{max}	0.9998	0.9995	0.9991	0.9987
x_j	1.5	2	2.5	3

观察图像和数据发现数值解 U 的振幅、最值随时间变化缓慢减小，衰减幅度并不明显；相位移等于时间间隔，没有出现明显的色散现象。